13.1. "Kritischer Punkt" der Wirkung, Euler-Lagrange-Gleichung, Minimalfläche

(i) Einem Hinweis folgend definieren wir

$$\psi := (\mathrm{id}, u) : \overline{U} \to \mathbb{R}^{n+1}, \qquad \psi(x) = (x, u(x)).$$

Das ist eine globale Parametrisierung für den Graphen $\mathrm{gr}(u)$. Es gilt

$$(D\psi)^T D\psi = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & Du^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n \\ Du \end{pmatrix} = \mathbb{1}_n + Du^T Du.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \det\big((D\psi)^T D\psi\big) &= \det\big(\mathbb{1}_n + Du^T Du\big) \\ &= \det\big(\mathbb{1}_1 + Du\, Du^T\big) \qquad \text{(gemäss einem Hinweis)} \\ &= 1 + \|\nabla u\|^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}_n\big(\mathrm{gr}(u) = \mathrm{im}\,\psi\big) &= \int_{\overline{U}} \sqrt{\det\big((D\psi)^T D\psi\big)} \\ &= \int_{\overline{U}} \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2} \\ &= \int_U L\big(\cdot, u, \nabla u\big) \\ &= S(u), \end{aligned}$$

wie behauptet.

(ii) Gemäss dem Satz "Kritischer Punkt der Wirkung und Euler-Lagrange-Gleichung" aus der Vorlesung ergibt sich, dass die kritischen Punkte die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllen. Wir leiten die Euler-Lagrange-Gleichung für L her. Zuerst haben wir

$$\begin{aligned} L_{\xi_i}(x, y, \xi) &= \partial_{\xi_i}\left(\sqrt{1 + \|\xi\|^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \|\xi\|)^{-1/2}(2\xi_i) \\ &= \frac{\xi_i}{\sqrt{1 + \|\xi\|^2}}, \end{aligned}$$

und

$$L_y(x, y, \xi) = 0.$$

Somit folgt, dass die Euler-Lagrange-Gleichung lautet:

$$\begin{aligned}
0 &= -\sum_{i=1}^{n} \left(L_\xi(\cdot, u, \nabla u)\right)_{x_i} + L_y(\cdot, y, \xi) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial_{x_i} u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right)_{x_i} \\
&= -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right).
\end{aligned}$$

(iii) Dies folgt direkt aus dem Korollar über Extremalstellen der Wirkung und Euler-Lagrange-Gleichung aus der Vorlesung.

(iv) Wir zeigen, dass die konstante Funktion $u = g$ die Minimalstelle ist. Wir nehmen $v \in \mathcal{A}_g$ und merken, dass für jedes $x \in U$

$$\sqrt{1 + \|\nabla v\|^2} \geq 1 = \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2},$$

weil $\nabla u = 0$. Es folgt

$$S(u) \leq S(v) \forall v \in \mathcal{A}_g.$$

Da gilt $\nabla u = 0$, folgt, dass u die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt.

13.2. Variante der Poisson-Gleichung Wir setzen

$$L(x, y, \xi) = \frac{1}{2}\|\xi\|^2 - \frac{y^2}{2}.$$

Nun leiten wir die Euler-Lagrange-Gleichung. Zuerst haben wir

$$L_{\xi_i}(x, y, \xi) = \partial_{\xi_i} \frac{1}{2} \left(\|\xi\|^2\right) = \xi_i,$$

und

$$L_y(x, y, \xi) = -y.$$

Somit folgt, dass die Euler-Lagrange-Gleichung ist

$$\begin{aligned}
0 &= -\sum_{i=1}^{n} \left(L_\xi(\cdot, u, \nabla u)\right)_{x_i} + L_y(\cdot, u, \nabla u) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} u)_{x_i} - u \\
&= -\Delta u - u
\end{aligned}$$

13.3. "Kritischer Punkt" der Wirkung, Euler-Lagrange-Gleichung, Teilchen auf einer Geraden

(i) Das Wirkungsfunktional ist gegeben durch

$$S(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,q,\dot{q})dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m}{2}|\dot{q}|^2 - U^t(q(t))\right).$$

(ii) Die Euler-Lagrange-Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} 0 &= -\left(L_v(\cdot,q,\dot{q})\right)_t + L_q(\cdot,q,\dot{q}) \\ &= -m\frac{d}{dt}\dot{q} - (U^t)'(q(t)) \\ &= -m\ddot{q} + F^t(q(t)). \end{aligned}$$

Diese ist nach Umstellung dann $F^t(q(t)) = m\ddot{q}$, die dem zweiten Newtonschen Gesetz entspricht.

13.4. "Kritischer Punkt" der Wirkung, Euler-Lagrange-Gleichung, elektrischer Schwingkreis

(i) Das Wirkungsfunktional ist gegeben durch

$$S(Q) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,Q,\dot{Q})dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{L}{2}\left|\dot{Q}\right|^2 - \frac{1}{2C}Q^2\right).$$

(ii) Die Euler-Lagrange-Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} 0 &= -\left(\mathcal{L}_v(\cdot,Q,\dot{Q})\right)_t + \mathcal{L}_q(\cdot,Q,\dot{Q}) \\ &= -L\frac{d}{dt}\dot{Q} - \frac{Q}{C} \\ &= -L\ddot{Q} - \frac{Q}{C}. \end{aligned}$$

Diese ist nach Umstellung dann $\ddot{Q} + \frac{Q}{LC} = 0$. Das stimmt mit der gewöhnlichen Differentialgleichung für den elektrischen LC-Schwingkreis überein.

13.5. Im elektrischen Feld gespeicherte Energie Die potentielle Energie für zwei Teilchen ist gegeben durch

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2 q_1}{\|x_2 - x_1\|},$$

wobei x_i die Position des Teilchens q_i ist. Für ein drittes Teilchen ergibt die zusätzliche Energie

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3 q_1}{\|x_3 - x_1\|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3 q_2}{\|x_3 - x_2\|},$$

und somit ist die gesamte Energie für drei Teilchen

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2 q_1}{\|x_2 - x_1\|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3 q_1}{\|x_3 - x_1\|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3 q_2}{\|x_3 - x_2\|}.$$

Für n Teilchen haben wir dann

$$\begin{aligned} W_n &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i q_j}{\|x_i - x_j\|} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_j}{\|x_i - x_j\|}\right). \end{aligned}$$

Der Term in den Klammern ist das Potential aller Teilchen an der Position x_i, d.h.

$$\Phi(x_i) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_j}{\|x_i - x_j\|}.$$

Daher folgt:

$$W_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\Phi(x_i).$$

Wir schließen daraus, dass die potentielle Energie für eine allgemeine Ladungsdichte im elektrostatischen Feld $\mathbf{E}$ mit Potential φ gegeben ist durch

$$W = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\rho\varphi\, dx$$

Nach dem Gaußschen Gesetz der Elektrostatik gilt:

$$\rho = \epsilon_0 \nabla\cdot\mathbf{E}.$$

Somit folgt für ein R, das groß genug ist, sodass $\operatorname{supp}(\rho) \subset B_R$:

$$\begin{aligned}
W &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{B_R} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \varphi \, dx \\
&= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{B_R} \nabla \cdot (\varphi \mathbf{E}) - \nabla \varphi \cdot \mathbf{E} \, dx \quad (\text{weil } \nabla \cdot (fX) = \nabla f \cdot X + f \nabla \cdot X, \text{ c.f. Serie 12}) \\
&= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\partial B_R} \varphi \mathbf{E} \, dS - \frac{\epsilon_0}{2} \int_{B_R} \nabla \varphi \cdot \mathbf{E} \, dx \quad (\text{mit dem Satz von Gauß}) \\
&= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\partial B_R} \varphi \mathbf{E} \, dS + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{B_R} \|\mathbf{E}\|^2 \, dx \quad (\text{weil } \nabla \varphi = -\mathbf{E}).
\end{aligned}$$

Wenn wir $R \to \infty$ nehmen, gilt:

$$\int_{\partial B_R} \varphi \mathbf{E} \, dS \to 0,$$

da $\varphi(x), \mathbf{E}(x) \to 0$ für $\|x\| \to \infty$. Daher:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathbf{E}\|^2 \, dx,$$

wie gewünscht.