In der ersten Vorlesung haben Sie eine Lösungsformel für die Transportgleichung kennengelernt. Um nachzuprüfen, dass wir die Gleichung damit tatsächlich lösen, haben wir die Kettenregel in mehreren Variablen verwendet. Diese Regel haben Sie in Analysis 2 kennengelernt. In der nächsten Aufgabe wird sie wiederholt.

2.1. Komposition, Kettenregel und Transportgleichung. Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen. Wir definieren die Komposition (= Verkettung = Verknüpfung) von f und g als die Funktion

$$g \circ f : X \to Z, \qquad g \circ f(x) := g(f(x)).$$

(i) Wir betrachten den Fall $X = Y = Z = \mathbb{R}$ und die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := x + 1, \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(y) := y^2.$$

(a) Berechnen Sie die Komposition $g \circ f$.

(b) Berechnen Sie die Komposition $f \circ g$.

(c) Sind diese zwei Funktionen gleich?

(ii) Wir betrachten den Fall $X = \mathbb{R}$, $Y = Z = \mathbb{R}^2$ und die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) := (x, x^2), \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ g(y) := \big(y_1 y_2, e^{y_2}\big).$$

(a) Berechnen Sie die Komposition $g \circ f$.

(b) Ist die Komposition $f \circ g$ wohldefiniert, d. h. sinnvoll?

(iii) Seien $X := Z := \mathbb{R}$, $Y := \mathbb{R}^n$ und $f = \big(f_1, \dots, f_n\big) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen[1]. Wir schreiben $y = \big(y_1, \dots, y_n\big)$ für die Koordinaten in $\mathbb{R}^n$. Wir definieren die Ableitung von f komponentenweise als

$$f'(x) := \big(f_1', \dots, f_n'\big).$$

Die *Kettenregel (in mehreren Variablen)* besagt, dass die Ableitung der Komposition $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$(g \circ f)'(x) = \nabla g(f(x)) \cdot f'(x) = \sum_{i=1}^{n} g_{y_i}(f(x)) f_i'(x).$$

Wir betrachten den Fall $X = Z = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^2$ und die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) := (x, x^2), \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(y) := y_1 y_2.$$

Berechnen Sie die Ableitung $(g \circ f)'$ auf die folgenden Arten:

[1] Das bedeutet, dass die ersten partiellen Ableitungen von f und g existieren und stetig sind.

(a) Berechnen sie zuerst $g \circ f$ und danach die Ableitung dieser Funktion.

(b) Verwenden Sie direkt die Kettenregel, ohne vorher $g \circ f$ zu berechnen.

Vergleichen Sie die beiden Resultate.

(iv) Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $v \in \mathbb{R}^n$. Wir schreiben die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^{n+1}$ als t und $x = \big(x_1, \dots, x_n\big)$. Wir definieren

$$u : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \qquad u(t,x) := g(x - tv).$$

Rechnen Sie nach, dass u die Transportgleichung

$$u_t + v \cdot \nabla u = 0$$

löst.

Tipp: Verwenden Sie dazu die Kettenregel.

2.2. Superpositionsprinzip und Wärmeleitungsgleichung. Sei $n = 1$ und $U = \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^2$. Wir schreiben die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ als t, x und betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta u = u_{xx}.$$

(i) Überprüfen Sie, dass für jede Zahl $\xi \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$u^\xi(t,x) := e^{-\xi^2 t} \sin(\xi x)$$

die Wärmeleitungsgleichung löst.

(ii) Seien $\xi_1, \xi_2, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Funktion

$$u := a_1 u^{\xi_1} + a_2 u^{\xi_2}.$$

Zeigen Sie, dass u die Wärmeleitungsgleichung löst.

Hinweis: Sie brauchen in dieser Teilaufgabe nichts zu rechnen.

(iii) Wir betrachten $U = \mathbb{R}^2$ und die PDG

$$u_{x_1} = u^2.$$

Gilt das Superpositionsprinzip für diese PDG? Begründen Sie Ihre Antwort.

Die folgende Aufgabe wird in Aufgabe 2.4 gebraucht werden.

2.3. Positive Definitheit einer quadratischen Matrix.

(i) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tipp: Verwenden Sie dazu das charakteristische Polynom.

(ii) Ist diese Matrix positiv definit?

Tipp: Verwenden Sie die in der Vorlesung erwähnte Tatsache, dass eine symmetrische reelle Matrix genau dann positiv definit ist, wenn alle ihre Eigenwerte (strikt) positiv sind.

(iii) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(iv) Ist diese Matrix positiv definit?

(v) Ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

positiv definit?

2.4. Elliptische, hyperbolische, parabolische Differentialgleichungen.

(i) Zeigen Sie, dass die gegebene lineare PDG zweiter Ordnung den angegebenen Typ hat.

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 2.3.

(a) $U = \mathbb{R}^2$,

$$u_{x_1x_1} + u_{x_1x_2} = -u_{x_2x_2} \qquad \text{elliptisch}$$

(b) $U = \mathbb{R}^3$,

$$u_{x_1x_1} + u_{x_1x_2} = -u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} \qquad \text{elliptisch}$$

(c) $U = \mathbb{R}^3$, Standardkoordinaten: t, x_1, x_2,

$$u_{tt} - u_{x_1x_1} = u_{x_1x_2} + u_{x_2x_2} \qquad \text{hyperbolisch}$$

(d) $U = \mathbb{R}^3$, Standardkoordinaten: t, x_1, x_2,

$$u_t - u_{x_1x_1} - u_{x_1x_2} = u_{x_2x_2} \qquad \text{parabolisch}$$

(ii) In dieser Teilaufgabe ist $U = \mathbb{R}^2$, und wir schreiben die Standardkoordinaten als x_1, x_2. Überprüfen Sie für die gegebene lineare PDG zweiter Ordnung, ob sie elliptisch oder hyperbolisch ist.

Tipp: Verwenden Sie eine Proposition aus der Vorlesung, die Elliptizität und Hyperbolizität im Fall $U \subseteq \mathbb{R}^2$ charakterisiert.

(a) $\sin(x_1)u_{x_1x_1} + 4u_{x_1x_2} = -u_{x_2x_2} + u_{x_2} + 7u$

(b) $u_{x_1x_1} = u_{x_1x_2} - (1 + x_2^2)u_{x_2x_2} + x_1u$

2.5. Variablentransformation für eine PDG auf $\mathbb{R}^2$.

(i) Wir schreiben die Standardkoordinaten auf $\mathbb{R}^2$ als x_1, x_2 und betrachten die PDG

$$u_{x_1x_2} = 0. \tag{1}$$

Finden Sie die allgemeine Lösung u dieser PDG. Zeigen Sie, dass das gefundene u die PDG tatsächlich löst.

Tipp: Integrieren Sie die PDG zuerst in x_2-Richtung und dann in x_1-Richtung.

(ii) Führen Sie für die PDG (1) die Variablentransformation $x \mapsto y$ durch, die durch die folgende Abbildung gegeben ist:

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y = \varphi(x) := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

D. h. , formulieren Sie die PDG als eine PDG für die Funktion $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um, für welche $v \circ \varphi = u$ gilt. (v ist eine Funktion der Variablen y_1, y_2.)

Tipp: Setzen Sie die Gleichheit $v \circ \varphi = u$ in die PDG für u ein und verwenden Sie die Kettenregel.

(iii) Wie heisst die transformierte (umformulierte) PDG (für die Funktion v)? Welchen Typ hat diese PDG?

(iv) Welchen Typ hat die PDG (1)?

(v) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der transformierten PDG (für v).

Tipp: Verwenden Sie (i).