In der Vorlesung haben wir mit Hilfe der Methode der Trennung der Variablen, nämlich mittels eines Produktansatzes, eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung gefunden. In der folgenden Aufgabe wenden wir diese Methode nochmals auf die Wärmeleitungsgleichung an, aber dieses Mal machen wir einen *Summenansatz* statt einen Produktansatz. Das ist einfacher, liefert aber eine Lösung, die am Rand des räumlichen Gebiets nicht verschwindet und daher gewisse Randbedingungen nicht erfüllt.

3.1. Lösungsmethode der Trennung der Variablen, Summenansatz für die Wärmeleitungsgleichung.

(i) Finden Sie eine Lösung der räumlich 1-dimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx} \tag{1}$$

mittels der Methode der Trennung der Variablen, indem Sie den folgenden Summenansatz machen:

$$u(t,x) = T(t) + X(x). \tag{2}$$

Tipp: Adaptieren Sie die Schritte, mittels derer wir in der Vorlesung eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung aufgrund des Produktansatzes gefunden haben. Tun Sie also das Folgende:

- Summenansatz (2) in die Wärmeleitungsgleichung (1) einfüllen. Wir erhalten dadurch eine gewöhnliche Differentialgleichung für T, worin die Konstante $a := X''(0)$ vorkommt.
- allgemeine reelle Lösung dieser GDG bestimmen
- auf analoge Weise eine GDG für X aufstellen und lösen
- gefundene Lösungen für T und X in den Summenansatz (2) einfüllen

(ii) Überprüfen Sie, dass die gefundene Funktion tatsächlich die Wärmeleitungsgleichung löst.

(iii) Bestimmen Sie eine Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der Wärmeleitungsgleichung (1), die die Dirichlet-Anfangsbedingung

$$u(t = 0, x) = x^2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

erfüllt.

In der nächsten Aufgabe wenden wir die Methode der Separation der Variablen auf die Wellengleichung an.

3.2. Lösungsmethode der Trennung der Variablen, Produktansatz für die Wellengleichung.

(i) Finden Sie eine Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ der räumlich 1-dimensionalen Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{3}$$

mittels der Methode der Trennung der Variablen, indem Sie den folgenden Produktansatz machen:

$$u(t,x) = T(t)X(x). \tag{4}$$

Tipps:

- Betrachten Sie zwecks Vereinfachung der Notation zuerst den Fall $c = 1$. Erklären Sie danach, wie die gefundene Lösung für ein allgemeines c angepasst werden muss.
- Adaptieren Sie die Schritte, mittels derer wir in der Vorlesung eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung aufgrund des Produktansatzes gefunden haben. Tun Sie also das Folgende:
  - Produktansatz (4) in die Wellengleichung (3) einfüllen. Wir erhalten dadurch eine gewöhnliche Differentialgleichung für X, worin die Konstante $\lambda := \frac{\ddot{T}(t_0)}{T(t_0)}$ vorkommt, wobei $t_0 \in \mathbb{R}$ ein Punkt ist, wofür $T(t_0) \neq 0$. (Wir betrachten hier den Fall, dass so ein Punkt existiert.)
  - Allgemeine Lösung dieser GDG bestimmen. Hierbei betrachten wir die Fälle $\lambda \neq 0$ und $\lambda = 0$ separat.
  - auf analoge Weise eine GDG für T aufstellen und lösen
  - gefundene Lösungen für X und T in den Produktansatz (4) einfüllen

(ii) Überprüfen Sie, dass die gefundene Funktion tatsächlich die Wellengleichung löst.

(iii) Bestimmen Sie eine Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ dieser Gleichung, die die Dirichlet-Anfangsbedingung

$$u(t=0,x) = e^{ix}, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

und die Neumann-Anfangsbedingung

$$u_t(t=0,x) = cie^{ix}, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{6}$$

erfüllt.

3.3. D'Alembertsche Formel für die Lösung der Wellengleichung in einer räumlichen Dimension. Wenden Sie die d'Alembertsche Formel an, um eine Lösung von (3), der Wellengleichung für $n = 1$, zu finden, die die Anfangsbedingungen (5,6) erfüllt. (Diese Formel haben Sie in der Vorlesung kennengelernt. Die Formel stimmt auch für komplexwertige Anfangsbedingungen und liefert dann eine komplexwertige Lösung.) Vergleichen Sie diese Lösung mit der in Aufgabe 3.2(iii) gefundenen Lösung.

3.4. Nochmals d'Alembert. Wir betrachten das Anfangswertproblem für die Wellengleichung mit $c = 1$, gegeben durch

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \\ u(t=0,x) &= 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \\ u_t(t=0,x) &= e^x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wenden Sie die d'Alembertsche Formel an, um eine Lösung dieses Problems zu finden.

3.5. Wellengleichung für eine schwingende Saite. Wir betrachten eine gespannte transvers (seitlich) schwingende Saite. Wir schreiben

$\mu :=$ lineare Massendichte der Saite := Masse pro Längeneinheit

$F :=$ Spannkraft der Saite

$y(t,x) :=$ Auslenkung der Saite in seitliche Richtung zum Zeitpunkt t an der Stelle x

Wir nehmen näherungsweise an, dass μ und F räumlich und zeitlich konstant sind. Wir definieren die Ausbreitungsgeschwindigkeit als

$$c := \sqrt{\frac{F}{\mu}}. \tag{7}$$

Leiten Sie die Wellengleichung für y,

$$y_{tt} = c^2 y_{xx},$$

her. Betrachten Sie dabei nur kleine Schwingungen und vernachlässigen Sie Reibung, Luftwiderstand und die Schwerkraft.

Tipp: Folgen Sie der Herleitung der Wellengleichung für eine Druckwelle in einem Kristallgitter, die in der Vorlesung behandelt wurde. Führen Sie dabei die folgenden Schritte aus:

(a) Zeichnen Sie die Saite gemäss folgender Anleitung: Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass die Saite durch eine regelmässige Kette von Punktteilchen gegeben ist. Wir nehmen an, dass die Saite in Ruhelage in x-Richtung gespannt ist und in y-Richtung schwingt.[1] Wir schreiben

$d :=$ Abstand zwischen benachbarten Massenpunkten in der Ruhelage

$y_i(t) :=$ Auslenkung des Punktteilchens i in y-Richtung zum Zeitpunkt t

(b) Zeichnen Sie die wirkenden Kräfte gemäss folgender Anleitung: Wir nehmen an, dass jedes Teilchen zentrale Kräfte auf seine nächsten Nachbarn ausübt. Wir schreiben:

$\vec{F}_i^{i+1}(t) :=$ Kraft (Vektor), die das Teilchen $i+1$ auf das Teilchen i zum Zeitpunkt t ausübt

$\alpha_i(t) :=$ Winkel zwischen x-Richtung und der Geraden durch die Orte der Teilchen i und $i+1$ zum Zeitpunkt t

Überlegen Sie sich mit Hilfe Ihrer Zeichnung, dass die y-Komponente der Kraft des Teilchens $i+1$ auf das Teilchen i gegeben ist durch

$$\sin(\alpha_i)F.$$

Schreiben Sie Ihre Überlegungen auf.

(c) Nähern Sie den Sinus durch den Tangens. Begründen Sie, warum Sie das tun dürfen.

(d) Drücken Sie den Tangens mittels y_i, y_{i+1} und d aus.

(e) Zeigen Sie mit Hilfe der vorherigen Schritte, dass die y-Komponente der total auf das Teilchen i ausgeübten Kraft gegeben ist durch

$$\frac{F}{d}\big(y_{i+1} - y_i - (y_i - y_{i-1})\big). \tag{8}$$

(f) Wir fassen die seitliche Teilchenauslenkung jetzt als eine Funktion von x (und der Zeit) auf. Wir schreiben dafür

$$y(t, x).$$

[1] Wir nehmen also an, dass die x-Komponente des Orts eines Teilchens gleich bleibt.

Wir haben

$$y(t, id) = y_i(t).$$

(Ursprünglich ist $y(t, x)$ nur für $x = id$ definiert. Wir ersetzen diese Funktion einer diskreten Variablen jetzt also durch eine Funktion einer kontinuierlichen Variablen.)

Drücken Sie $y_x\big(t, x = id\big)$ näherungsweise durch y_i, y_{i+1} und d aus. Benutzen Sie diesen Ausdruck, um $y_x\big(t, x = id\big)$ näherungsweise durch y_{i-1}, y_i, y_{i+1} und d auszudrücken.

(g) Verwenden Sie das zweite Gesetz von Newton, (8) und den letzten Schritt, um die Näherung

$$m y_{tt}\big(t, x = id\big) \approx F d y_{xx}(t, id)$$

herzuleiten.

(h) Zeigen Sie, dass y die Wellengleichung löst, indem Sie den Abstand d gegen 0 gehen lassen.

(i) Zeigen Sie, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit durch (7) gegeben ist.

(j) Entspricht die Formel (7) Ihrer Intuition? Warum?

Bonusaufgabe: Wie stark müssen wir die Saite spannen, damit der Kammerton A erklingt?

Machen Sie dabei ein paar vernünftige Annahmen, zum Beispiel zur Länge der Saite.

Stichwortartiger Tipp zur Bonusaufgabe: Stehende Welle, siehe Vorlesung.