4.1. Allgemeine Lösung der Wellengleichung in einer räumlichen Dimension. In der Vorlesung haben wir einen Satz gesehen, der besagt, dass die allgemeine Lösung der Wellengleichung in einer räumlichen Dimension durch

$$u(t,x) = v_+(x+ct) + v_-(x-ct)$$

gegeben ist, mit $v_\pm \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Rechnen Sie nach, dass u die Wellengleichung tatsächlich löst.

4.2. Abhängigkeitsgebiet und Einflussgebiet Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem für die Wellengleichung mit $c = 1$:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{für } t \geq 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) := \begin{cases} 1, & x \in [-1,1] \\ 0, & x \notin [-1,1] \end{cases} \\ u_t(0,x) = v_0(x) := 0 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie die Lösung dieses Problems, die durch die d'Alembertsche Formel gegeben ist.

Bemerkung: Die Funktion u_0 ist nicht stetig, da sie in den Punkten $x = -1$ und $x = 1$ Sprünge aufweist. Die Funktion u ist daher nicht stetig partiell differenzierbar. Die d'Alembertsche Formel liefert trotzdem eine Funktion, die die Wellengleichung in einem schwachen Sinn löst (im Sinne der Distributionen). Das Wort *schwach* wird in diesem Kontext zum Beispiel im folgenden Buch definiert:

L. C. Evans, Partial Differential Equations, second edition, 2010.

Die Theorie schwacher Lösungen partieller Differentialgleichungen geht über den Rahmen unserer Vorlesung hinaus.

(ii) Zeichnen Sie die Lösung u bei den Zeiten $t_0 = 0$, $t_1 = 1/2$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$.

(iii) Tun Sie für jeden der Punkte $(t,x) = (1,0)$, $(1,1)$ und $(1,3)$ das Folgende:

- Berechnen und zeichnen Sie sein Abhängigkeitsgebiet.
- Bestimmen Sie den Schnitt dieses Gebiets mit dem Intervall $[a,b] := [-1,1]$.
- Entscheiden Sie, ob dieser Schnitt leer ist.
- Entscheiden Sie, ob die Lösung u im Punkt (t,x) von den Anfangsdaten auf dem Intervall $[-1,1]$ abhängt.

(iv) Was ist $u(1,3)$? Was ist $u(2,0)$?

Bemerkung: Diese Frage können Sie ohne Rechnung beantworten.

(v) Zeichnen Sie das Einflussgebiet des Intervalls $[-1,1]$.

4.3. Inhomogene Wellengleichung, Prinzip von Duhamel. Finden Sie eine Lösung der *inhomogenen* Wellengleichung in einer räumlichen Dimension

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) := e^x \tag{1}$$

zusammen mit den homogenen Anfangsbedingungen

$$u(t=0,x) = 0, \tag{2}$$
$$u_t(t=0,x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Tipp: Verwenden Sie das Prinzip von Duhamel aus der Vorlesung. Gehen Sie dabei wie in den Beispielen in der Vorlesung vor, also:

(a) Schauen Sie nochmals in Ihren Notizen, was das Prinzip von Duhamel aussagt und wie wir es in Beispielen angewendet haben.

(b) Finden Sie eine Funktion v der Variablen $s \geq 0, t \geq 0, x \in \mathbb{R}$, sodass für jedes $s \in [0,\infty)$ die Funktion $v(s,\cdot,\cdot)$ die (homogene) Wellengleichung mit $c=1$, die homogene Anfangsbedingung

$$v(s, t=s, x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

sowie die inhomogene Anfangsbedingung

$$\partial_t v(s, t=s, x) = f(s,x) = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

erfüllt.

Tipp: Verwenden Sie eine Aufgabe aus Übungsserie 3 (Nochmals d'Alembert). In dieser Aufgabe haben wir eine Lösung w der Wellengleichung mit $c=1$ und den Anfangsbedingungen $w(t=0,x)=0$, $w_t(t=0,x)=e^x$ gefunden. Die Funktion $v(s,t,x) := w(t-s,x)$ löst die Wellengleichung und die Anfangsbedingungen (4,5). (Rechnen Sie das nach!)

(c) Schliessen Sie durch Vergleich mit Ihren Notizen, dass die Voraussetzungen für das Duhamel-Prinzip erfüllt sind.

(d) Berechnen Sie

$$u(t,x) := \int_0^t v(s,t,x)ds.$$

Gemäss dem Prinzip von Duhamel löst diese Funktion die inhomogene Wellengleichung (1) und die homogenen Anfangsbedingungen (2,3).

(e) Überprüfen Sie das!

(Bemerkung zu dieser Aufgabe siehe nächste Seite.)

Bemerkung: physikalische Bedeutung der inhomogenen Wellengleichung: Diese Gleichung beschreibt zum Beispiel Schwingungen einer Saite, die durch eine äussere Kraft angetrieben wird. Die Inhomogenität (= Quellenterm) f beschreibt dann die Kraft pro Länge. Die inhomogene Wellengleichung beschreibt auch die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem Medium, das Ladungen und Ströme enthält. Die Inhomogenität f enthält dann Ableitungen der Ladungen und Ströme.

4.4. Inhomogene Wärmeleitungsgleichung, Prinzip von Duhamel.

(i) Finden Sie eine Lösung der *inhomogenen* Wärmeleitungsgleichung in einer räumlichen Dimension

$$u_t - u_{xx} = f(t,x) := e^{t+x} \tag{6}$$

zusammen mit der homogenen Anfangsbedingung

$$u(t=0,x) = 0.$$

Tipp: Verwenden Sie das Prinzip von Duhamel aus der Vorlesung. Gehen Sie dabei wie in den Beispielen in der Vorlesung und in Aufgabe 4.3 vor.

(ii) Finden Sie eine Lösung der PDG (6) zusammen mit der *inhomogenen* Anfangsbedingung

$$u(t=0,x) = \sin(x).$$

Tipp: Verwenden Sie die erste Teilaufgabe, eine Lösung w der *homogenen* Wärmeleitungsgleichung mit Anfangsbedingung $w(t=0,x) = \sin(x)$ und das Superpositionsprinzip.

Bemerkung: physikalische und chemische Bedeutung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung: Diese Gleichung beschreibt zum Beispiel die zeitliche Temperaturentwicklung in einem Gebiet, indem geheizt (oder gekühlt) wird. Die Inhomogenität (= Quellenterm) f beschreibt dann die durch Heizen zugeführte Wärmeenergie pro Volumen und Zeit. Die inhomogene Wärmeleitungsgleichung beschreibt auch Diffusion einer Stoffmenge bei gleichzeitiger externer Stoffzufuhr. Die Inhomogenität f beschreibt dann die externe Zufuhr.

4.5. Beweis des Prinzips von Duhamel. Lesen Sie den Beweis des Prinzips von Duhamel in den Vorlesungsnotizen und stellen Sie Fragen, falls sie welche haben.