5.1. Fourierkoeffizienten, Fourierreihenentwicklung der periodisierten Exponentialfunktion. Wir betrachten die Einschränkung der (reellen) Exponentialfunktion auf das Intervall $\left[-\frac{P}{2}, \frac{P}{2}\right)$, also die Funktion

$$\widetilde{f} : \left[-\frac{P}{2}, \frac{P}{2}\right) \to \mathbb{R}, \qquad \widetilde{f}(x) := e^x.$$

Wir definieren f als die periodische Fortsetzung dieser Funktion.

(i) Zeichnen Sie die Funktion f im Fall $P = 2\pi$ auf dem Intervall $[-3\pi, 3\pi)$. Was ist dann $f(\pi)$?

(ii) Die Funktion f ist stückweise stetig. Begründen Sie das.

(iii) Berechnen Sie für jede ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ den k-ten Fourierkoeffizienten $\widehat{f}_k$. (Siehe die Vorlesung für die Definition.)

Bemerkung: Da f stückweise stetig ist, sind seine Fourierkoeffizienten wohldefiniert, d. h. sinnvoll.

(iv) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \left(-\frac{P}{2}, \frac{P}{2}\right)$ die Fourierreihe von f im Punkt x, also $\left(\sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}_k e^{ik\omega x}\right)_{N \in \mathbb{N}_0}$, gegen $f(x)$ konvergiert. (Dabei ist $\omega := \frac{2\pi}{P}$.)

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

(v) Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe im Punkt $x = \frac{P}{2}$? Warum? Ist der Wert gleich $f(x)$?

Bemerkung: Die Funktion f ist die *Periodisierung* der auf das Intervall $\left[-\frac{P}{2}, \frac{P}{2}\right)$ eingeschränkten Exponentialfunktion.

5.2. Fourierkoeffizienten, Fourierreihenentwicklung der Zickzackfunktion. Wir betrachten die Einschränkung der Betragsfunktion auf das Intervall $[-\pi, \pi)$, also die Funktion

$$\widetilde{f} : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}, \qquad \widetilde{f}(x) := |x|.$$

Wir definieren f als die periodische Fortsetzung dieser Funktion und nennen f die *Zickzackfunktion.*

(i) Zeichnen Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-3\pi, 3\pi)$. Was ist $f(-3\pi)$?

(ii) Die Funktion f ist stetig. Begründen Sie das.

(iii) Berechnen Sie für jede ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ den k-ten Fourierkoeffizienten $\widehat{f}_k$.

Bemerkung: Da f stetig, also stückweise stetig ist, sind seine Fourierkoeffizienten wohldefiniert, d. h.sinnvoll.

(iv) Vergleichen Sie $\widehat{f}_k$ mit $\widehat{f}_{-k}$. Was stellen Sie fest? Zeigen Sie diesen Zusammenhang, ohne Ihre Berechnung der Fourierkoeffizienten zu verwenden.

Tipp: Der Zusammenhang wurde in der Vorlesung erwähnt.

(v) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Fourierreihe im Punkt x gegen $f(x)$ konvergiert.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

5.3. Fourierkoeffizienten, Fourierreihenentwicklung einer periodisierten quadratischen Funktion. Wir definieren f als die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion

$$\widetilde{f} : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}, \qquad \widetilde{f}(x) := x^2.$$

(i) Zeichnen Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-3\pi, 3\pi)$. Was ist $f(2\pi)$?

(ii) Die Funktion f ist stetig. Begründen Sie das.

(iii) Berechnen Sie für jede ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ den k-ten Fourierkoeffizienten $\widehat{f}_k$.

Bemerkung: Da f stetig, also stückweise stetig ist, sind seine Fourierkoeffizienten wohldefiniert, d. h.sinnvoll.

(iv) Vergleichen Sie $\widehat{f}_k$ mit $\widehat{f}_{-k}$. Was stellen Sie fest? Zeigen Sie diesen Zusammenhang, ohne Ihre Berechnung der Fourierkoeffizienten zu verwenden.

Tipp: Der Zusammenhang wurde in der Vorlesung erwähnt.

(v) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Fourierreihe im Punkt x gegen $f(x)$ konvergiert.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

(vi) Zeigen Sie, dass die Folge

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k^2} \right)_{N \in \mathbb{N}}$$

konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert, also die unendliche Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Tipps: Schauen Sie sich an, wie wir in der Vorlesung mittels der Fourierreihenentwicklung der Rechteckfunktion die Gregory-Leibniz-Formel für π hergeleitet haben. Verwenden Sie die Teilaufgabe (v) und betrachten Sie den Punkt $x = 0$.

Bemerkung: Das Basler Problem ist die Aufgabe, die Summe der reziproken Quadratzahlen zu berechnen, also die unendliche Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Mit diesem Problem haben sich einige Basler Mathematiker beschäftigt. Es wurde durch Leonhard Euler gelöst. Um es zu lösen, können wir die Parseval-Identität für die Sägezahnfunktion gebrauchen. Diese Identität werden wir später behandeln. In dieser Teilaufgabe geht es darum, die Variante des Basler Problems zu lösen, in der wir die entsprechende *alternierende* Summe betrachten.

5.4. Fourierkoeffizienten einer reellwertigen Funktion. Sei $P > 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine P-periodische stückweise stetige Funktion und $k \in \mathbb{Z}$.

(i) Rechnen Sie nach, dass

$$\widehat{f}_{-k} = \overline{\widehat{f}_k}.$$ [1]

(ii) Nehmen Sie jetzt an, dass f reelle Werte annimmt. Zeigen Sie:

- **(a)** Falls f gerade ist, dann ist $\widehat{f}_k$ reell.
- **(b)** Falls f ungerade ist, dann ist $\widehat{f}_k$ imaginär.

(iii) Schauen Sie die Funktionen an, für welche wir in der Vorlesung und in den Übungen die Fourierkoeffizienten berechnet haben. Überprüfen Sie das, was wir in der letzten Teilaufgabe herausgefunden haben, an diesen Beispielen.

5.5. Lesen. Lesen Sie die folgenden Abschnitte in den Notizen zur Vorlesung *Analysis 3* und stellen Sie Fragen, falls sie welche haben:

- 3.1 Periodische, stückweise stetige Funktionen, Fourierkoeffizienten
- 3.2 Fourierreihenentwicklung

[1] Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ schreiben wir $\overline{z} = x - iy$ für die komplex Konjugierte von z.