Die folgende Aufgabe wurde in der Vorlesung im Unterabschnitt *Grundlage für die Fourierreihenentwicklung* verwendet.

6.1. L^2-Skalarprodukt. Wir definieren

$$V := \big\{P\text{-periodische stückweise stetige, rechtsstetige Funktion von } \mathbb{R} \text{ nach } \mathbb{C}\big\}.$$

(Rechtsstetigkeit bedeutet, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Einschränkung von f auf $[x, \infty)$ an der Stelle x konvergiert. (f konvergiert dann automatisch gegen $f(x)$.) V ist ein linearer Unterraum des Vektorraumes aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$. V ist also selbst ein Vektorraum. Wir definieren das L^2-*Skalarprodukt* $\langle\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ durch

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{P}\int_0^P f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass das ein Skalarprodukt ist.

Erinnerung: Das bedeutet:

- $\langle\rangle$ ist (komplex) linear im ersten Argument.
- $\langle\rangle$ ist hermitesch, d. h. für alle $v, w \in V$ gilt $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$.
- $\langle\rangle$ ist positiv definit, d. h. für jedes $v \in V \setminus \{0\}$ gilt $\langle v, v\rangle > 0$.

Bemerkungen:

- Sie haben dieses Skalarprodukt schon in der Vorlesung *Lineare Algebra* kennengelernt. Siehe Beispiel 4.2.0.2 (Das euklidische und das L^2-Skalarprodukt) im Skript *Lineare Algebra für D-ITET & RW* von Dr. V. Gradinaru.
- Ein Skalarprodukt heisst auch *inneres Produkt*. Ein Skalarprodukt auf einem *komplexen* Vektorraum heisst auch *hermitesches inneres Produkt*.

Die nächste Aufgabe besagt, dass jede orthonormale Basis (wie in der Vorlesung definiert) aus orthogonalen Vektoren besteht. Das gilt insbesondere für die orthonormale Basis, die aus den imaginären Exponentialfunktionen besteht. Das wurde in der Vorlesung erwähnt, als der philosophische Grund für die Fourierreihenentwicklung behandelt wurde.

6.2. Orthonormalbasis eines Skalarproduktraums. Seien V ein reeller Vektorraum, $\langle\rangle$ ein Skalarprodukt auf V und $v, w \in V$. Wir nennen v *normiert* g. d. w. $\langle v, v\rangle = 1$. Wir nennen v und w *(zueinander) orthogonal* g. d. w. $\langle v, w\rangle = 0$. Seien $v_1, \dots, v_n$

Vektoren in V. Wir nennen $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis von V g. d. w. jeder dieser Vektoren normiert ist und für jeden Vektor $v \in V$ gilt, dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i. \tag{2}$$

Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis von V. Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ orthogonal zueinander sind.

Tipp: Fixieren Sie $k = 1, \ldots, n$, betrachten Sie $\langle v_k, v_k \rangle$ und schreiben Sie einen der beiden Vektoren v_k mittels (2) um.

6.3. Anfangswertproblem für die räumlich eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit periodischer Bedingung. Wir definieren $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als die 2π-periodische Fortsetzung der quadratischen Funktion

$$[-\pi, \pi) \ni x \mapsto x^2.$$

(i) Finden Sie eine stetige Funktion $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche auf dem Gebiet $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ glatt ist, die räumlich eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}$$

löst, die Anfangsbedingung

$$u(0, x) = v(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

erfüllt und räumlich 2π-periodisch ist, d. h.

$$u\big(t, x + 2\pi\big) = u(t, x), \qquad \forall t \geq 0,\, x \in \mathbb{R}.$$

Erklären Sie, warum u alle gewünschten Bedingungen erfüllt und die einzige Funktion ist, die diese Bedingungen erfüllt.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

(ii) Zeichnen Sie von Hand oder mit einem Graphikprogramm $u(t, \cdot)$ für einige Werte von t.

(iii) Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $t_0 > 0$ gibt, sodass für alle $t \geq t_0$ die Moden mit $|k| > 1$ insgesamt weniger als εe^{-t} zur Lösung u beitragen. Geben Sie eine Näherungsformel für u an, in der nur die nullte, erste und minus erste Mode vorkommen.

Tipps:

- In der Vorlesung haben wir den Beitrag der Moden mit $|k| > 1$ für die Anfangsfunktion gegeben durch die 2π-periodische Fortsetzung der Betragsfunktion gegen oben abgeschätzt. (Siehe die Bemerkung zur Wärmeleitungsgleichung: *Abfallen der Moden.*) Folgen Sie den Schritten in dieser Abschätzung.
- Benutzen Sie die Aufgabe aus Übungsserie 5, in der Sie die Fourierkoeffizienten der Funktion v berechnet haben.

Bemerkung: Wir definieren

$$C := \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{k^2}.$$

Die Zahl

$$t_0 := -\frac{\log \frac{\varepsilon}{C}}{3}$$

hat die gewünschte Eigenschaft.

(iv) Berechnen Sie $u(3,0)$ mit einer Genauigkeit von mindestens $10^{-3}e^{-3} + 10^{-5}$. (Der Term 10^{-5} ermöglicht es Ihnen, das Ergebnis auf die fünfte Stelle nach dem Dezimalpunkt[1] zu runden.)

Tipp: Verwenden Sie die Lösung des Basler Problems, welche besagt, dass

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(v) Wie verhält sich für ein festes $x \in \mathbb{R}$ die Lösung u an der Stelle (t,x) asymptotisch, wenn t gegen unendlich strebt?

6.4. Ungerade Fortsetzung einer Funktion und die Wärmeleitungsgleichung. Betrachten Sie die Funktion

$$v : [0,\pi] \to \mathbb{R}, \qquad v(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \text{falls } \frac{\pi}{2} < x \le \pi. \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie die ungerade 2π-periodische Fortsetzung $\widetilde{v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von v.

(ii) Zeichnen Sie diese Fortsetzung.

[1] Im englischsprachigen Raum wird eine Zahl in Dezimaldarstellung mit Hilfe eines Dezimalpunktes geschrieben, also zum Beispiel $1.23 = \frac{123}{100}$. Ich halte mich an diese Konvention.

(iii) Berechnen Sie die Lösung des Rand- und Anfangswertproblems für die räumlich eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \\ u(t,0) &= u(t,\pi) = 0, \qquad \forall t \in (0,\infty), \\ u(0,x) &= v(x), \qquad \forall x \in [0,\pi]. \end{aligned}$$

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe (i) und einen Satz über die Wärmeleitungsgleichung aus der Vorlesung.

6.5. Wärmeleitungskern. Wir definieren den (räumlich eindimensionalen) Wärmeleitungskern als die Funktion

$$\Phi : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(t,x) := \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}.$$

Rechnen Sie nach, dass diese Funktion die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ löst.

6.6. Lösung der Wellengleichung für eine räumlich periodische Funktion mit Hilfe der räumlichen Fourierreihenentwicklung. Seien $v, w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodische Funktionen, wobei v zweimal stetig differenzierbar und w stetig differenzierbar ist. Lösen Sie das Anfangswertproblem für die räumlich eindimensionale Wellengleichung mit $c = 1$ für eine räumlich 2π-periodische Funktion u,

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \\ u(0,x) &= v(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) &= w(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \\ u\big(t, x+2\pi\big) &= u(t,x), \qquad \forall t,x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Schreiben Sie die Wellengleichung dazu als ein System gewöhnlicher DG für die räumlichen Fourierkoeffizienten $t \mapsto \widehat{u(t,\cdot)}_k$ ($k \in \mathbb{Z}$) der gesuchten Funktion u um.

Bemerkung: Diese Umformulierung ist analog zur Umformulierung der Wärmeleitungsgleichung als ein System gewöhnlicher DG für die räumlichen Fourierkoeffizienten, die in der Vorlesung behandelt wurde.

6.7. Zeitumkehrinvarianz der Wellengleichung und der Schrödingergleichung mit zeitunabhängiger potentiellen Energie.

(i) Rechnen Sie nach, dass für jede Lösung $u : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ der Wellengleichung $u_{tt} = c^2 \Delta u$ die *zeitumgekehrte Funktion* $\widetilde{u}(\widetilde{t}, x) := u(-\widetilde{t}, x)$ die Wellengleichung ebenfalls löst.

(ii) Sei $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Funktion. (Sie spielt die Rolle der potentiellen Energie eines Teilchens). Die zugehörige *zeitabhängige Schrödingergleichung* für ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m ist die PDG[2]

$$i\hbar u_t = \mathcal{H}(u) := -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + Vu$$

für eine Funktion[3] $u : \mathbb{R}^{1+3} \to \mathbb{C}$, wobei:

$\hbar :=$ reduziertes Plancksches Wirkungsquantum $\approx 1.1 \cdot 10^{-34} Js$

Rechnen Sie nach, dass für jede Lösung u dieser Gleichung die komplex konjugierte zeitumgekehrte Funktion $\widetilde{u}(\widetilde{t}, x) := \overline{u(-\widetilde{t}, x)}$ die Schrödingergleichung ebenfalls löst.

Bemerkung: Das bedeutet, dass die Schrödingergleichung (mit zeitunabhängiger potentiellen Energie) zeitumkehrinvariant ist.

6.8. Lesen. Lesen Sie den folgenden Unterabschnitt in den Notizen zur Vorlesung *Analysis 3* und stellen Sie Fragen, falls sie welche haben:

Eigenschaften der WÃ¤rmeleitungsgleichung und ihrer Lösungen: …

(f) Zeitumkehrinvarianz in der Physik, Irreversibilität der Wärmeleitungsgleichung (S. 100 in der Version der Notizen vom 24. Oktober 2024)

[2] $\mathcal{H}$ heisst *Hamiltonoperator*.
[3] u wird in der Physik *Wellenfunktion des Teilchens* genannt.