7.1. Fouriertransformation.

(i) Wir definieren die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x):=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{falls } -1\le x\le 1,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Zeichnen Sie f. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{f}$.

(ii) Wir definieren die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x):=\begin{cases}1, & \text{falls } -1< x< 0,\\ -1, & \text{falls } 0<x<1,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Zeichnen Sie f. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{f}$.

(iii) Wir definieren die Funktion

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad F(x):=\begin{cases}1-|x|, & \text{falls } |x|<1,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Zeichnen Sie F. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{F}$.

(iv) Überprüfen Sie, dass F stückweise stetig differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung F'.

(v) Was ist die Beziehung zwischen den Fouriertransformierten $\widehat{F}$ und $\widehat{f}$? Erklären Sie, warum diese Beziehung gilt, ohne etwas zu rechnen.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

(vi) Sei $n\in\mathbb{N}_0=\{0,1,\ldots\}$. Wir definieren die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x):=\begin{cases}x^n e^{-x}, & \text{falls } x\ge 0,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Zeichnen Sie f. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{f}$.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

7.2. Fouriertransformation. Sei $a>0$. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x):=e^{-a|x|}.$$

7.3. Eigenschaften der Fouriertransformation, Gaußsche Glockenfunktion. Wir definieren die Menge

$$L^1_{\mathrm{pc}}(\mathbb{R},\mathbb{C}) := \big\{\text{absolut integrierbare stückweise stetige Funktion von } \mathbb{R} \text{ nach } \mathbb{C}\big\}. \tag{1}$$

(i) (Linearität) Die Abbildung $\mathcal{F}$ ist linear, d. h.

$$\mathcal{F}(cf) = c\mathcal{F}(f), \qquad \mathcal{F}(f+g) = \mathcal{F}(f)+\mathcal{F}(g), \qquad \forall c \in \mathbb{C},\ f,g \in L^1_{\mathrm{pc}}(\mathbb{R},\mathbb{C}).$$

(ii) (Verschiebung) Sei $v \in \mathbb{R}$ und $f \in L^1_{\mathrm{pc}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Wir definieren $\tau_v(f)$ als die Funktion gegeben durch

$$\tau_v(f)(x) := f(x-v).$$

(τ_v entspricht also einer Verschiebung des Arguments um $-v$. Der Buchstabe τ steht für *Translation.*) Leiten Sie die folgende Formel her:

$$\mathcal{F}(\tau_v(f))(\xi) = e^{-i\xi v}\mathcal{F}(f)(\xi).$$

(iii) (Streckung) Sei $0 \neq a \in \mathbb{R}$ und $f \in L^1_{\mathrm{pc}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Wir definieren $\delta_a(f)$ als die Funktion gegeben durch

$$\delta_a(f)(x) := f\left(\frac{x}{a}\right).$$

(δ_a entspricht also einer Streckung (Dilatation) des Arguments um den Faktor $\frac{1}{a}$. Der Buchstabe δ steht für *Dilatation.*) Leiten Sie die folgende Formel her:

$$\mathcal{F}(\delta_a(f))(\xi) = |a|\mathcal{F}(f)(a\xi)$$

(iv) (Gaußsche Glockenfunktion) Sei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Wir definieren die *Gaußsche Glockenfunktion mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ* als die Funktion

$$f_{\mu,\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_{\mu,\sigma}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}. \tag{2}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f_{\mu,\sigma}$.

Tipps:

- Wir definieren

$$f(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Verwenden Sie die Formel für die Fouriertransformierte von f,

$$\widehat{f} = \sqrt{2\pi} f, \tag{3}$$

die wir in der Vorlesung hergeleitet haben.

- Verwenden Sie die Teilaufgaben (i),(ii),(iii).

Bemerkung: Die Funktion $f_{\mu,\sigma}$ ist L^1-normiert im Sinn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f_{\mu,\sigma}(x)\right| dx = 1.$$

Das ist der Grund für den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ in der Definition von $f_{\mu,\sigma}$.

7.4. Fouriertransformation und -rücktransformation. Wir definieren den *Kardinalsinus* als die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0, \\ \dfrac{\sin x}{x}, & \text{falls } x \neq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Diese Funktion ist stetig (auch im Punkt $x = 0$). Sie ist nicht absolut integrierbar. Ihre Fouriertransformierte $\widehat{f}(\xi)$ ist aber trotzdem für jedes $\xi \neq \pm 1$ wohldefiniert, d. h., die Integrale

$$\int_0^b f(x) e^{-i\xi x} dx, \qquad \int_a^0 f(x) e^{-i\xi x} dx$$

konvergieren für $b \to \infty$ und $a \to -\infty$. (Für $\xi = \pm 1$ konvergieren diese Integrale hingegen nicht.)

Ziel dieser Aufgabe ist es, $\widehat{f}(\xi)$ für $\xi \neq \pm 1$ auf zwei verschiedene Arten zu berechnen, nämlich:

- direkt mittels der Definition,
- mittels Fourier-Rücktransformation.

(i) Sei $\xi \neq \pm 1$. Berechnen Sie $\widehat{f}(\xi)$ direkt mittels der Definition.

Tipps:

- Schreiben Sie den Integranden mittels der eulerschen Formel als eine Linearkombination von Sinus- und Kosinusfunktionen geteilt durch x.
- Das Integral einer ungeraden Funktion von $-a$ bis a verschwindet.
- Zeigen Sie, dass für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(cx)}{x} dx = \operatorname{sign}(c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \qquad \operatorname{sign}(c) := \begin{cases} -1, & \text{falls } c < 0 \\ 0, & \text{falls } c = 0, \\ 1, & \text{falls } c > 0. \end{cases}$$

- Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

  Sie dürfen diese Tatsache ohne Herleitung verwenden.

- Unterscheiden Sie die Fälle $\xi < -1$, $-1 < \xi < 1$, $1 < \xi$.

Wir berechnen $\widehat{f}(\xi)$ nun noch einmal, mittels Fourier-Rücktransformation.

(ii) Sei f eine stückweise stetige Funktion und $\xi \in \mathbb{R}$, sodass die Fouriertransformierte von f an der Stelle ξ wohldefiniert ist. Überprüfen Sie, dass

$$\widehat{f}(\xi) = 2\pi \overline{\check{\overline{f}}}(\xi).$$

(iii) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{f}$ an jeder Stelle $\xi \neq \pm 1$ mittels des Satzes aus der Vorlesung, der besagt, dass die Fourierrücktransformierte der Fouriertransformierten einer Funktion h wieder die Funktion h ist, d. h.

$$\mathcal{F}^*(\mathcal{F}(h))(\xi) = \check{\widehat{h}}(\xi) = h(\xi). \tag{5}$$

Tipps:

- Teilaufgabe (ii)
- Aufgabe 7.1(i) (Fouriertransformation), in der wir gezeigt haben, dass

$$f = \widehat{h}$$

  für eine bestimmte Funktion h

Bemerkung: Strikt genommen dürfen wir den Satz aus der Vorlesung nicht anwenden, da die Voraussetzung, dass $\widehat{h}$ absolut integrierbar ist, in unserem Fall nicht erfüllt ist. Die Fourierrücktransformierte $\check{\widehat{h}}$ ist jedoch bei jeder Stelle $\xi \neq \pm 1$ wohldefiniert. Da h bei jeder solchen Stelle stetig ist, gilt (5) für jedes solche ξ.

7.5. Anwendung der Fouriertransformation auf die Varianz der Gaußschen Glockenfunktion.

(i) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$x \mapsto (x - \mu)^2 f_{\mu,\sigma}(x),$$

wobei $f_{\mu,\sigma}$ wie in (2) definiert ist.

Tipps:

- Aufgabe 7.3(iv)
- Satz aus der Vorlesung, der die Fouriertransformierte der Funktion $x \mapsto xf(x)$ mittels $\mathcal{F}(f)$ ausdrückt.

(ii) Was ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_{\mu,\sigma}(x)dx?$$

Bemerkung: Dieses Integral ist die *Varianz* der Gaußschen Glockenfunktion $f_{\mu,\sigma}$. Die Varianz ist das Quadrat der Standardabweichung σ.

7.6. Faltung und Fouriertransformation. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetige Funktionen, sodass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$\mathbb{R} \ni y \mapsto f(x-y)g(y) \in \mathbb{C}$$

uneigentlich integrierbar ist. Wir definieren die *Faltung von f und g* als die Funktion

$$f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad (f*g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Wir nehmen jetzt an, dass f beschränkt und f und g absolut integrierbar sind. Zeigen Sie, dass für die Fouriertransformierten gilt:

$$(f*g)\widehat{\ } = \widehat{f}\widehat{g}.$$

Tipp: Verwenden Sie den Satz von Fubini. Dieser Satz sagt, dass man bei einem Doppelintegral unter gewissen Umständen die Integrationsreihenfolge umdrehen darf.

7.7. Wärmeleitungsgleichung. Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \qquad \text{auf } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(0,x) &= u_0(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

für die Anfangsfunktionen

(a) $u_0(x) := e^x$,

(b) $u_0(x) := \cos(x)$.

Tipps:

- Satz aus der Vorlesung über die Lösung der WLG auf $\mathbb{R}$
- Integration durch Substitution