8.1. Gewöhnliche Differentialgleichung und Fouriertransformation. Finden Sie eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$-u''(x) + u(x) = f(x) := e^{-|x|}.$$

Tipps:

- Fouriertransformation
- die Formel, die wir in der Vorlesung berechnet haben:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$$

8.2. Lösung der Wellengleichung mit Hilfe der räumlichen Fouriertransformation Seien $u_0, v_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, wobei u_0 zweimal stetig differenzierbar und v_0 stetig differenzierbar ist. Lösen Sie das Anfangswertproblem für die räumlich eindimensionale Wellengleichung mit $c = 1$,

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \\ u(0,x) &= u_0(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) &= v_0(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Schreiben Sie dazu die Wellengleichung als ein System gewöhnlicher DG für die räumliche Fouriertransformierte $t \mapsto \widehat{u(t,\bullet)}(\xi)$ ($\xi \in \mathbb{R}$) der gesuchten Funktion u um.

Bemerkung: Diese Umformulierung ist analog zur Umformulierung der Wellengleichung für eine räumlich periodische Funktion mit Hilfe der räumlichen Fourierreihenentwicklung, die wir in Übungsserie 6 behandelt haben.

8.3. elektrostatisches Potential, Poissongleichung

(i) Wir betrachten das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und das magnetische Feld $\mathbf{B}$ und nehmen an, dass $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ zeitlich konstant sind, d. h. nicht von t abhängen.[1] Wir können $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ also als zeitunabhängige Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$ auffassen, d. h. als Abbildungen $\mathbf{E}, \mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{E}$ ein Potential besitzt, d. h., dass es eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi.$$

(Wir verwenden hier die Physikkonvention für das Vorzeichen.)

Tipps:

[1] Diese Annahme wird in der Elektro*statik* gemacht. Die Elektro*dynamik* behandelt die allgemeine Situation, in der sich diese Felder ändern können.

- Verwenden Sie eine der Maxwellgleichungen. Siehe Übungsserie 1.
- Verwenden Sie einen Satz aus Analysis 2 über die Konservativität eines Vektorfeldes.

  Bemerkung: Die Funktion φ ist bis auf eine additive Konstante eindeutig. (Siehe die Vorlesung *Analysis 2.*) Sie heisst *elektrostatisches Potential.* Der Unterschied dieses Potentials an zwei verschiedenen Punkten ist die *elektrische Spannung* zwischen den Punkten.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

wobei ρ die Ladungsdichte und ε_0 die elektrische Feldkonstante ist.

Bemerkung: Das Potential erfüllt also die Poissongleichung, d. h. die inhomogene Laplacegleichung.

Tipp: Verwenden Sie eine der Maxwellgleichungen. Siehe Übungsserie 1.

8.4. harmonische Funktionen: Fundamentallösung der Laplacegleichung, holomorphe Funktionen.

(i) Sei $n \geq 2$. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die euklidische Norm von x als

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

(Manchmal wird diese Norm als $|x|$ geschrieben.) Wir definieren die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := \begin{cases} \log\|x\|, & \text{falls } n = 2, \\ \|x\|^{2-n}, & \text{falls } n \geq 3. \end{cases}$$

Überprüfen Sie, dass

$$\Delta\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i x_i}(x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{1}$$

Tipp: Verwenden Sie die Kettenregel und die Leibnizregel (= Produktregel).

Bemerkung: Eine zweimal partiell differenzierbare Funktion heisst *harmonisch*, falls sie die homogene Laplacegleichung erfüllt. Gemäss (1) ist die Funktion φ also ausserhalb des Nullpunktes harmonisch. Bis auf eine multiplikative Konstante ist φ die Fundamentallösung der Laplacegleichung. Diese Fundamentallösung tritt in der Lösungsformel für die Poissongleichung (= inhomogene Laplacegleichung) in $\mathbb{R}^n$ auf.

(ii) Wir schreiben die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ als x, y. Erinnerung an die Vorlesung *Komplexe Analysis*: Eine stetig partiell differentierbare Funktion $u : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ heisst *holomorph* genau dann, wenn sie die Cauchy-Riemann-Differentialgleichung

$$u_y = iu_x \tag{2}$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass jede holomorphe zweimal stetig partiell differentierbare Funktion $u : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ harmonisch ist, d. h., die Laplacegleichung $\Delta u = 0$ erfüllt. [2]

Tipp: Verwenden Sie die Gleichung (2) zweimal sowie die Tatsache, dass wir partielle Ableitungen vertauschen dürfen.

Bemerkung: Das liefert viele Beispiele harmonischer Funktionen. Zum Beispiel ist jede polynomiale Funktion von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ holomorph, also harmonisch. Ein Beispiel dafür ist die Funktion

$$u(z) := z^2 + 2z + 1.$$

8.5. Laplacegleichung auf dem Quadrat. Wir betrachten das Einheitsquadrat $A := [0, 1] \times [0, 1]$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und schreiben die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ als x, y. Bestimmen Sie die Lösung $u : A \to \mathbb{R}$ des Dirichlet-Randwertproblems für die Laplacegleichung

$$\begin{aligned} \Delta u = 0 \qquad & \text{auf } A, \\ u(x, y) = g(x, y) \qquad & \text{auf } \partial A = \text{Rand von A}, \end{aligned}$$

wobei

$$g(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \\ 0, & \text{falls } x = 1, \\ 0, & \text{falls } y = 0, \\ \sin(\pi x) \dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}, & \text{falls } y = 1. \end{cases}$$

Überprüfen Sie, dass die gefundene Funktion tatsächlich das Dirichletproblem löst.

Tipp: Verwenden Sie den Produktansatz

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

[2] Das bedeutet, dass der Real- und der Imaginärteil von u diese Gleichung erfüllen.

Die folgende Aufgabe werden wir in der Vorlesung brauchen, um die Poissonformel für die Lösung des Dirichlet-Randwertproblems für die Laplacegleichung auf der Kreisscheibe "herzuleiten".

8.6. Laplaceoperator für $\mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten. Wir definieren die *Polarkoordinatenabbildung*

$$\Psi : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad \Psi(r, \varphi) := r\big(\cos\varphi, \sin\varphi\big).$$

Wir betrachten eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wir definieren

$$v := u \circ \Psi : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad v(r, \varphi) = u\big(\Psi(r, \varphi)\big).$$

Rechnen Sie nach, dass gilt

$$(\Delta u) \circ \Psi = \big(u_{xx} + u_{yy}\big) \circ \Psi = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi}.$$

Tipp: Verwenden sie die Kettenregel und die Leibnizregel (= Produktregel), um $v_r, v_{rr}, v_\varphi, v_{\varphi\varphi}$ auszurechnen.

Bemerkung: Salopp gesagt, besagt obige Formel, dass der Laplace-Operator für $\mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten gegeben ist durch

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2.$$