9.1. Laplacegleichung auf der Kreisscheibe, Poisson-Formel, Maximum- und Minimumprinzip. Sei $u : B^2 \to \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung des Dirichlet-Randwertproblems für die Laplacegleichung

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0 \qquad \text{auf } B^2, \\ &u(x,y) \to g(x_0,y_0) := x_0^3 \quad \text{für } (x,y) \to (x_0,y_0), \qquad \forall (x_0,y_0) \in \partial B^2. \end{aligned}$$

(i) Berechnen Sie $u(0,0)$.

Tipp: Verwenden Sie die Poisson-Formel aus der Vorlesung und die Tatsache, dass $\cos(\vartheta + \pi) = -\cos(\vartheta)$.

(ii) Zeigen Sie, dass gilt:

$$-1 \leq u(x,y) \leq 1 \qquad \text{für jedes } (x,y) \in B^2.$$

Tipp: Verwenden Sie das Maximumprinzip und das Minimumprinzip aus der Vorlesung.

9.2. Eindeutigkeit der Lösung der Poisson-Gleichung. Wir betrachten die offene Einheitskreisscheibe

$$B^2 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 < 1 \right\}$$

und zwei stetige Funktionen

$$f : B^2 \to \mathbb{R}, \qquad g : \partial B^2 \to \mathbb{R}.$$

(∂B^2 ist der Rand der Einheitskreisscheibe, also der Einheitskreis.) Zeigen Sie, dass die Lösung des Dirichlet-Randwertproblems für die Poissongleichung

$$\begin{aligned} &\Delta u = f \qquad \text{auf } B^2, \\ &u(x,y) \to g(x_0,y_0) \quad \text{für } (x,y) \to (x_0,y_0), \qquad \forall (x_0,y_0) \in \partial B^2, \end{aligned}$$

eindeutig ist, d. h., falls u_0, u_1 Lösungen dieses Problems sind, dann gilt $u_0 = u_1$.

Tipp: Verwenden Sie das Maximumprinzip und das Minimumprinzip aus der Vorlesung.

9.3. Lösung des Dirichletproblems für die Laplacegleichung auf der Kreisscheibe mittels Fourierreihe.

(i) Finden Sie eine Lösung für das folgende Dirichlet-Randwertproblem für die Laplacegleichung

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{auf } B^2 \tag{1}$$

$$u(x,y) = g(x,y) := x^3 \qquad \text{für } (x,y) \in \partial B^2. \tag{2}$$

Tipps:

- Wechseln Sie zu Polarkoordinaten und schreiben Sie u als eine Superposition von harmonischen Funktionen, in der die Fourierkoeffizienten der Funktion $h(\varphi) := g\big(\cos\varphi, \sin\varphi\big)$ vorkommen. Gehen Sie dabei wie im Beispiel in der Vorlesung vor.
- Überprüfen und verwenden Sie die Identität

$$e^{3i\varphi} + e^{-3i\varphi} = 8\cos^3\varphi - 6\cos\varphi.$$

(ii) Überprüfen Sie, dass die gefundene Funktion u das Dirichletproblem (1,2) tatsächlich löst.

9.4. Laplacegleichung auf dem Quadrat, unendliche Superposition. Wir betrachten das offene Quadrat $U := (0,\pi) \times (0,\pi)$ und schreiben ∂U für den Rand von U. Wir betrachten die Funktion

$$g : \partial U \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \\ 0, & \text{falls } x = \pi, \\ 0, & \text{falls } y = 0, \\ x(x-\pi), & \text{falls } y = \pi. \end{cases}$$

(i) Finden Sie eine Lösung $u : [0,\pi]\times[0,\pi] \to \mathbb{R}$ des folgenden Dirichlet-Randwertproblems für die Laplacegleichung:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{auf } U \tag{3}$$

$$u = g \qquad \text{auf } \partial U. \tag{4}$$

Tipps: Nehmen Sie an, dass u dieses Problem löst und die folgende Form hat[1]:

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x,y), \tag{5}$$

$$u_k(x,y) := \sin(kx)\sinh(ky). \tag{6}$$

[1] $\sinh(t) := \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ ist der Sinus hyperbolicus.

Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k. Gehen Sie dabei wie im Beispiel in der Vorlesung vor.

(ii) Überprüfen Sie, dass die gefundene Funktion das Dirichletproblem tatsächlich löst.