10.1. Lösung des Randwertproblems für die Laplacegleichung auf einem Halbraum. Wir definieren den *Halbraum*

$$\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty) = \big\{ x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, x_n > 0 \big\}.$$

Wir betrachten den Fall $n = 3$. Berechnen Sie eine Lösung $u : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ des Randwertproblems für die Laplacegleichung

$$\Delta u = 0 \qquad \text{auf } \mathbb{R}^3_+, \tag{1}$$

$$u(x) \to g(x_0) := 1 \text{ für } x \to x_0 \qquad \forall x_0 \in \partial\mathbb{R}^3_+ = \mathbb{R}^2 \times \{0\}. \tag{2}$$

Hinweis: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

10.2. Lösung der Poissongleichung, homogen geladene Kugel. Seien X eine Menge und $S \subseteq X$. Wir erinnern uns an die charakteristische Funktion von S,

$$\chi_S : X \to \mathbb{R}, \qquad \chi_S(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in S, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir schreiben

$$\overline{B}^n := \overline{B}^n_1(0).$$

(i) Berechnen Sie eine Lösung $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ der Poissongleichung

$$-\Delta u = f := \chi_{\overline{B}^3}.$$

Hinweise:

- Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.[1]
- Betrachten Sie zunächst einen Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ der Form $x = (0, 0, x_3 = z)$ mit $z \in [0,\infty)$. Betrachten Sie zur Vereinfachung zuerst den **Fall** $z \geq 1$.
- Drücken Sie das Integral, wodurch $u(x)$ gegeben ist, in Kugelkoordinaten aus. Führen Sie also eine Substitution mit der folgenden Koordinatentransformation aus:

$$y := \psi(r, \varphi, \theta) := r\big(\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta\big).$$

Bestimmen Sie dazu die Integrationsgrenzen.

[1] In diesem Satz wird vorausgesetzt, dass f von der Klasse C^2 ist. Der Satz kann aber auch in unserem Fall angewendet werden.

Berechnen Sie die Determinante der Jacobi-Matrix von ψ in jedem Punkt (r, φ, θ). (Die Jacobi-Matrix und ihre Determinante haben Sie in Analysis 2 in Übungsserie 8 schon einmal berechnet, allerdings für ein ψ, in dem $\cos\theta$ und $\sin\theta$ vertauscht waren.)

Drücken Sie $\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} - y \right\|^2$ mittels r, φ, θ aus und vereinfachen Sie den Ausdruck.

- Berechnen Sie zuerst das Integral nach der Variablen θ. Verwenden Sie dazu die Substitution $u = \cos\theta$.
- Erraten Sie eine Stammfunktion für den von u abhängigen Integranden. Falls Sie damit Mühe haben, dann probieren Sie zuerst eine Stammfunktion von $f(u) := (1 + 2u)^{-\frac{1}{2}}$ zu finden.
- Vereinfachen Sie die entstandenen Wurzeln. Denken Sie daran, dass die Wurzeln positiv sind.
- Berechnen Sie jetzt die Integrale nach φ und r. Verwenden Sie dabei Ihre Annahme, dass $z \geq 1$. Sie erhalten $u(0, 0, z)$.
- Betrachten Sie jetzt den **Fall** $z < 1$. Machen Sie bei der Berechnung des Integrals nach θ die folgende Fallunterscheidung: $z < r$, $z > r$. (Den Fall $z = r$ brauchen wir nicht zu betrachten. (Warum?))
- Bestimmen Sie mit Hilfe von $u(0, 0, z)$ den Wert $u(x)$ für ein allgemeines $x \in \mathbb{R}^3$. Zeigen und verwenden Sie, dass u drehinvariant ist. Machen Sie die folgende Fallunterscheidung: $\|x\| \geq 1$, $\|x\| < 1$.

(ii) Berechnen Sie das elektrostatische Potential φ, das durch eine homogen (=gleichmässig) geladene Kugel mit Gesamtladung q erzeugt wird.

Hinweise: Gemäss einer Aufgabe in Übungsserie 8 ist dieses Potential eine Lösung der Poissongleichung

$$-\Delta\varphi = f := \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

wobei ρ die Ladungsdichte und ε_0 die elektrische Feldkonstante ist. Das Potential ist durch ein Vielfaches der Funktion u aus der ersten Teilaufgabe gegeben.[2]

[2] Das Potential ist nur bis auf eine additive Konstante definiert. Wir wählen diese Konstante so, dass $\varphi(x) \to 0$ für $\|x\| \to \infty$.

(iii) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke **E**, die durch eine homogen (=gleichmässig) geladene Kugel mit Gesamtladung q und Radius 1 erzeugt wird.

Hinweis: Verwenden Sie eine Aufgabe in Übungsserie 8.

Die folgende Aufgabe werden wir in der nächsten Aufgabe verwenden.

10.3. Integral über die Sphäre. Wir betrachten die Teilmenge

$$V := (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \subseteq \mathbb{R}^2$$

und die Abbildung

$$\psi : V \to \mathbb{R}^3, \qquad \psi(\varphi, \theta) := \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist eine lokale Parametrisierung der Sphäre S^2. Ihr Bild ist eine Teilmenge von S^2, die fast ganz S^2 ist. (Was ist das Bild?) Sei $f : S^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\int_{S^2} f \, dA = \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi f \circ \psi(\varphi, \theta) \sin\theta \, d\varphi \, d\theta.$$

Hinweise:

- Gemäss Analysis 2 gilt für eine durch $\psi : V \to \Sigma$ parametrisierte Fläche Σ in $\mathbb{R}^3$ die Formel
$$\int_\Sigma f \, dA = \int_V f \circ \psi \big\| D_1\psi(y) \times D_2\psi(y) \big\| dy.$$
- In unserem Fall stehen $D_1\psi(y)$ und $D_2\psi(y)$ senkrecht aufeinander. (Überprüfen Sie das!) Was folgt daraus für die Norm des Kreuzproduktes?

10.4. Lösung des Randwertproblems für die Laplacegleichung auf dem Einheitsball. Wir schreiben

$$B^n := B_1^n(0).$$

Berechnen Sie eine Lösung des Randwertproblems für die Laplacegleichung

$$\Delta u = 0 \qquad \text{auf } B^3, \tag{3}$$
$$u(x) \to g(x_0) := 1 \text{ für } x \to x_0 \qquad \forall x_0 \in \partial B^3 = S^2. \tag{4}$$

Hinweise:

- Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.
- Betrachten Sie zunächst einen Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ der Form $x = (0, 0, x_3 = z)$ mit $z \in [0, 1)$.
- Drücken Sie das Integral, wodurch $u(x)$ gegeben ist, in sphärischen Koordinaten aus. Verwenden Sie dazu Aufgabe 10.3.
- Berechnen Sie zuerst das Integral nach der Variablen θ. Verwenden Sie dazu die Substitution $u = \cos\theta$.
- Vereinfachen Sie die entstandenen Wurzeln. Denken Sie daran, dass die Wurzeln positiv sind.
- Vereinfachen Sie den entstandenen Ausdruck.
- Berechnen Sie das Integral nach der Variablen φ.

10.5. Poissonformel für die Kreisscheibe. Rechnen Sie nach, dass die Poissonformel für die Lösung des Randwertproblems für die Laplacegleichung auf einer Kreisscheibe mit der Formel für dieses Randwertproblems für den Einheitsball im Fall $n = 2$ übereinstimmt. (Diese Formel enthält den Poissonkern für den Ball B^n und wurde in der Vorlesung als Satz formuliert.)

Bemerkung: Die Variablen x, y spielen in der Poissonformel für die Kreisscheibe und in der Poissonformel für den Einheitsball unterschiedliche Rollen.