Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $\varphi : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren den *Träger von* φ als den Abschluss der Nichtnullstellenmenge von φ,

$$\operatorname{supp}\varphi := \overline{\varphi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})} = \overline{\big\{x \in U \,\big|\, \varphi(x) \neq 0\big\}}.$$

Wir definieren

$$C_c^2(U, \mathbb{R}) := \big\{\varphi \in C^2(U, \mathbb{R}) \,\big|\, \operatorname{supp}\varphi \text{ ist kompakt und in } U \text{ enthalten}\big\}.$$

(Die Elemente $\varphi \in C_c^2(U, \mathbb{R})$ heissen *Testfunktionen.*)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein C^1-Gebiet. Eine *greensche Funktion* für U ist eine Funktion

$$G : \big\{(x, y) \in U \times \overline{U} \,\big|\, x \neq y\big\} \to \mathbb{R},$$

sodass für jedes $x \in U$ die Funktion $G^x := G(x, \bullet) : \overline{U} \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$ C^2 ist und die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$-\int_U G^x(y)\Delta\varphi(y)\,dy = \varphi(x), \qquad \forall \varphi \in C_c^2(U, \mathbb{R}), \tag{1}$$

$$G^x = 0 \qquad \text{auf } \partial U. \tag{2}$$

Wir schreiben Φ_n für die Fundamentallösung der Laplacegleichung.

11.1. Greensche Funktion für den oberen Halbraum. Wir nehmen an, dass $n \geq 3$. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\widetilde{x} := \big(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n\big).$$

($\widetilde{x}$ ist der an der Hyperebene $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ gespiegelte Punkt x.) Wir definieren die Funktion

$$G := G_{\mathbb{R}^n_+} : \mathbb{R}^n_+ \times \overline{\mathbb{R}}^n_+ \to \mathbb{R}, \qquad G(x, y) := \Phi_n(y - x) - \Phi_n(y - \widetilde{x}).$$

(i) Zeigen Sie, dass G eine greensche Funktion für $\mathbb{R}^n_+$ ist.

Hinweise für (1):

- Zeigen Sie, dass für jedes $x \in U$ gilt, dass

  $$-\int_U \Phi_n(x - y)\Delta\varphi(y)\,dy = \varphi(x).$$

  Verwenden Sie dazu die Substitution $z := x - y$, Ableiten unter dem Integral und einen Satz aus der Vorlesung (Lösung der Poissongleichung auf $\mathbb{R}^n$).

- Wählen Sie ein C^1-Gebiet U, sodass

$$\operatorname{supp}\varphi \subseteq U, \qquad \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n_+.$$

  Schreiben Sie den Ausdruck $\int_U \Phi_n(y-\widetilde{x})\Delta\varphi(y)\,dy$ mittels der zweiten greenschen Identität um.

- Verwenden Sie, dass $\Phi_n(\bullet - \widetilde{x})$ auf U harmonisch ist und $\operatorname{supp}\varphi \subseteq U$, um zu zeigen, dass $\int_U \Phi_n(y-\widetilde{x})\Delta\varphi(y)\,dy = 0$.

(ii) Wir definieren den *Poissonkern für* $\mathbb{R}^n_+$ als die Funktion

$$K_{\mathbb{R}^n_+} : \mathbb{R}^n_+ \times \big(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}\big) \to \mathbb{R}, \qquad K_{\mathbb{R}^n_+}(x,y) := \frac{2}{n\alpha_n}\frac{x_n}{\|x-y\|^n}.$$

Zeigen Sie, dass

$$K^x_{\mathbb{R}^n_+} = -\partial_\nu G^x_{\mathbb{R}^n_+} = -\nabla G^x_{\mathbb{R}^n_+}\cdot\nu : \partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}\times\{0\} \to \mathbb{R},$$

wobei ν das nach aussen weisende Einheitsnormalvektorfeld auf $\partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$ ist.

(iii) Sei $g : \mathbb{R}^{n-1}\times\{0\} \to \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte Funktion. Wir betrachten das folgende Randwertproblem für die (homogene) Laplacegleichung für eine Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n_+,\mathbb{R})$:

$$\Delta u = 0 \qquad \text{auf } \mathbb{R}^n_+, \tag{3}$$

$$u(x) \to g(x_0) \text{ für } x \to x_0 \qquad \forall x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}. \tag{4}$$

Wir definieren

$$u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}, \qquad u(x) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}} K_{\mathbb{R}^n_+}(x,y)g(y)\,dy. \tag{5}$$

Gemäss einem Satz aus der Vorlesung (Randwertproblem für die Laplacegleichung auf einem Halbraum) löst u das Randwertproblem (3,4). Zeigen Sie, dass diese Lösungsformel mit der Formel aus dem Satz über die Darstellung der Lösung des Randwertproblems mittels einer greenscher Funktion übereinstimmt.

11.2. Greensche Funktion für den Einheitsball. Wir nehmen an, dass $n \geq 3$. Wir kürzen ab

$$B^n := B^n_1(0), \qquad \overline{B}^n := \overline{B}^n_1(0), \qquad S^{n-1} := S^{n-1}_1(0).$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definieren wir

$$\widetilde{x} := \frac{x}{\|x\|^2}.$$

($\widetilde{x}$ ist der an der Einheitssphäre S^{n-1} gespiegelte Punkt x.) Wir definieren die Funktion

$$G := G_{B^n} : B^n \times \overline{B}^n \to \mathbb{R}, \qquad G(x,y) := \Phi_n(y-x) - \Phi_n\big(\|x\|(y-\widetilde{x})\big).$$

(i) Zeigen Sie, dass G eine greensche Funktion für B^n ist.

Hinweise

- Gehen Sie für (1) analog zur Aufgabe 11.1 vor. Verwenden Sie, dass $\Phi_n\big(\|x\|(y-\widetilde{x})\big) = \|x\|^{2-n}\Phi_n(y-\widetilde{x})$.
- Bedingung (2): Zeigen Sie, dass für jedes $y \in \partial B^n = S^{n-1}$ und $x \neq 0$ gilt:

  $$\|x\|^2\|y-\widetilde{x}\|^2 = \|x-y\|^2.$$

  Folgern Sie daraus, dass (2) erfüllt ist.

(ii) Wir definieren den *Poissonkern für* B^n als die Funktion

$$K_{B^n} : B^n \times S^{n-1} \to \mathbb{R}, \qquad K_{B^n}(x,y) := \frac{1}{n\alpha_n}\frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^n}.$$

Zeigen Sie, dass

$$K^x_{B^n} = -\partial_\nu G^x_{B^n} = -\nabla G^x_{B^n} \cdot \nu : \partial B^n = S^{n-1} \to \mathbb{R},$$

wobei ν das nach aussen weisende Einheitsnormalvektorfeld auf ∂B^n ist.

Hinweise:

- Wir haben ν in Analysis 2 bestimmt. Für jedes $y \in \partial B^n = S^{n-1}$ steht $\nu(y)$ senkrecht auf dem Tangentialraum $T_y S^{n-1}$, zeigt nach aussen und hat Länge 1.

(iii) Sei $g : S^{-1} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir betrachten das folgende Randwertproblem für die (homogene) Laplacegleichung für eine Funktion $u \in C^2(B^n, \mathbb{R})$:

$$\Delta u = 0 \qquad \text{auf } B^n, \tag{6}$$

$$u(x) \to g(x_0) \text{ für } x \to x_0 \qquad \forall x_0 \in \partial B^n = S^{n-1}. \tag{7}$$

Wir definieren

$$u : B^n \to \mathbb{R}, \qquad u(x) := \int_{S^{n-1}} K_{B^n}(x,y)g(y)\,dA(y). \tag{8}$$

Gemäss einem Satz aus der Vorlesung (Randwertproblem für die Laplacegleichung auf dem Einheitsball) löst u das Randwertproblem (6,7). Zeigen Sie, dass diese Lösungsformel mit der Formel aus dem Satz über die Darstellung der Lösung des Randwertproblems mittels einer greenscher Funktion übereinstimmt.

11.3. Harmonizität von Funktion Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $h \in C^2(U, \mathbb{R})$, sodass

$$\int_U h\Delta\varphi = 0, \qquad \forall \varphi \in C_c^2(U, \mathbb{R}). \tag{9}$$

Zeigen Sie, dass h harmonisch ist, d. h.

$$\Delta h = 0.$$

Bemerkungen:

- Wir können Harmonizität von h also dadurch testen, dass wir den Laplace-Operator Δ auf Testfunktionen φ anwenden, mit h multiplizieren und integrieren.
- Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein C^1-Gebiet, G eine greensche Funktion für U und $x \in U$. Aus der Aufgabe folgt, dass G^x harmonisch ist.

Hinweise:

- Sei $h \in C^2(U, \mathbb{R})$ eine Funktion, wofür es einen Punkt $x_0 \in U$ gibt, sodass

  $$\Delta h(x_0) > 0.$$

  Zeigen Sie, dass es eine Funktion $\varphi \in C_c^2(U, \mathbb{R})$ gibt, sodass

  $$\varphi(x_0) > 0 \qquad \text{und} \qquad (\Delta h)\varphi \geq 0.$$

  Tipp dafür: Wählen Sie ein kleines $\varepsilon \in (0, \infty)$ und eine drehinvariante Funktion $\varphi_0 \in C_c^2\big(B_\varepsilon^n(x_0), \mathbb{R}\big)$, sodass $\varphi_0(x_0) > 0$. Um eine solche Funktion zu konstruieren, verwenden Sie eine glatte Funktion $\rho : [0, 3] \to \mathbb{R}$, sodass $\rho = 1$ auf $[0, 1]$ und $\rho = 0$ auf $[2, 3]$. (Eine solche Funktion existiert.)
- Verwenden Sie die zweite greensche Identität für das Gebiet $B_\varepsilon^n(x_0)$, um zu zeigen, dass

  $$\int_U h\Delta\varphi > 0.$$

  Bemerkung: Die Randterme verschwinden.
- Schliessen Sie daraus, dass (9) impliziert, dass h harmonisch ist.