12.1. vektoranalytische Identität Seien $n \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^1(U)$ und $v \in C^2(U)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\nabla \cdot (u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v$$

Bemerkung: Diese Identität haben wir in der Vorlesung im Beweis der zweiten greenschen Identität und im Beweis eines Satzes verwendet, der besagt, dass die Lösung des Randwertproblem für die Poissongleichung eindeutig ist.

12.2. Verschwindende Ableitung impliziert Konstanz. Sei $n \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und weg-zusammenhängend und $u : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung, sodass $Du = 0$.[1] Zeigen Sie, dass u konstant ist.

Hinweise:

- Da U offen und weg-zusammenhängend ist, gibt es für jedes Paar von Punkten $x_0, x_1 \in U$ einen glatten Weg x von x_0 nach x_1. (In der Definition wird nur gefordert, dass der Weg stetig ist. Wir können ihn aber glatt wählen, da U offen ist. Sie dürfen das ohne Beweis verwenden.)
- Wenden Sie einen Satz aus Analysis 2 auf $f := u \circ x$, um zu zeigen, dass $f' = 0$.
- Wenden Sie einen Satz aus Analysis 1 an, um zu zeigen, dass f konstant ist.

Bemerkung: Diese Teilaufgabe haben wir in der Vorlesung im Beweis eines Satzes verwendet, der besagt, dass die Lösung des Randwertproblems für die Poissongleichung eindeutig ist.

12.3. Drehinvarianz des Gradienten und des Laplace-Operators, Invarianz der Divergenz unter volumenerhaltenden Transformationen Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu sehen, dass der Gradient-, Divergenz- und Laplace-Operator unter gewissen Transformationen des Raumes invariant sind. Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus. Für jede Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definieren wir den *Rückzug* (oder *Pullback*) *von* f *unter* Φ als die Funktion

$$\Phi^* f := f \circ \Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Für jedes Vektorfeld $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definieren wir den *Rückzug von* X *unter* Φ als das Vektorfeld

$$\Phi^* X := (D\Phi)^{-1} X \circ \Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad (\Phi^* X)(x) = D\Phi(x)^{-1} X(\Phi(x)).$$

Eine Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heisst *euklidische Transformation* (oder *Bewegung*) g. d. w. sie den euklidischen Abstand erhält.

[1] Für jedes $x \in U$ ist $du(x) = Du(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die (totale) Ableitung von u im Punkt x.

(i) (Gradient) Zeigen Sie, dass für jede differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und jede euklidische Transformation $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt, dass

$$\nabla(\Phi^* f) = \Phi^*(\nabla f). \tag{1}$$

Hinweise:

- Es gibt eine orthogonale Matrix $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, sodass $\Phi(x) = Ox + v$.

  Verwenden Sie:
- $\nabla f = (Df)^T$
- Kettenregel
- Die Ableitung einer affinen[2] Abbildung Φ an einer Stelle x ist der lineare Teil von Φ.

Bemerkung: Die Identität (1) bedeutet, dass

$$(\Phi^*)^{-1} \circ \nabla \circ \Phi^* = \nabla$$

für jede euklidische Transformation Φ, d. h., der Gradient ∇ ist invariant unter euklidischen Transformationen.

(ii) (Divergenz) Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine affine Abbildung und $X \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie, dass

$$\nabla \cdot (\Phi^* X) = \Phi^*(\nabla \cdot X). \tag{2}$$

Hinweise: Verwenden Sie das Folgende:

- $(\nabla \cdot X)(x) = \mathrm{tr}(J_X(x))$, wobei $J_X(x) :=$ Jacobi-Matrix von X im Punkt x und $\mathrm{tr} :=$ Spur
- Die Ableitung einer affinen Abbildung Φ an einer Stelle x ist der lineare Teil von Φ.
- Kettenregel
- $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$

Bemerkung: Die Identität (2) bedeutet, dass

$$(\Phi^*)^{-1} \circ \mathrm{div} \circ \Phi^* = \mathrm{div},$$

für jede affine Transformation, d. h., die Divergenz $\mathrm{div} = \nabla \cdot$ ist invariant unter affinen Transformationen.

[2] Affin bedeutet linear plus konstant.

(iii) (Laplace-Operator) Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine euklidische Transformation und $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\Delta(\Phi^* f) = \Phi^*(\Delta f). \tag{3}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Identität $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$ und Teilaufgaben (i),(ii).

Bemerkungen:

(a) Die Identität (3) bedeutet, dass

$$(\Phi^*)^{-1} \circ \Delta \circ \Phi^* = \Delta$$

für jede euklidische Transformation, d. h., der Laplace-Operator Δ ist invariant unter euklidischen Transformationen.

(b) Daraus folgt, dass die Laplace-Gleichung unter euklidischen Transformationen invariant ist, d. h., falls $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ die Laplacegleichung $\Delta u = 0$ löst und Φ eine euklidische Transformation ist, dann löst $\Phi^* u = u \circ \Phi$ ebenfalls die Laplacegleichung.

(c) Die Fundamentallösung Φ_n der Laplacegleichung ist invariant unter orthogonalen Transformationen, d. h., für jede orthogonale Transformation O gilt $O^*\Phi_n = \Phi_n \circ O = \Phi_n$. Für $n = 3$ ist die Fundamentallösung also insbesondere dreh-invariant. Vor dem Hintergrund von Bemerkung (b) ist es plausibel, dass es nicht-konstante Lösungen der Laplacegleichungen gibt, die unter orthogonalen Transformationen invariant sind.

12.4. greensche Funktion für allgemeinen Halbraum Sei O eine orthogonale Transformation von $\mathbb{R}^n$. Finden Sie eine greensche Funktion für den Halbraum

$$O \cdot \mathbb{R}^n_+ = \left\{ Ox \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^n_+ \right\}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 12.3.