13.1. "kritischer Punkt" der Wirkung, Euler-Lagrange-Gleichung, Minimalfläche Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet. Wir definieren die *Lagrangefunktion*

$$L : \overline{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad L(x, y, \xi) := \sqrt{1 + \|\xi\|^2}.$$

Sei $g : \partial U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir definieren die *zulässige Menge* von Funktionen als

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_g := \left\{ u \in C^2(\overline{U}, \mathbb{R}) \,\middle|\, u = g \text{ auf } \partial U \right\}. \tag{1}$$

Wir definieren das *Wirkungsfunktional* als

$$S := S_{L,g} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, \qquad S(u) := \int_U L\big(x, u(x), \nabla u(x)\big) dx. \tag{2}$$

(i) Zeigen Sie, dass $S(u)$ das n-dimensionale Volumen des Graphen $\mathrm{gr}(u)$ ist.

Bemerkung: Insbesondere ist $S(u)$ für $n = 1$ die *Länge* der Kurve gegeben durch $\mathrm{gr}(u)$ und für $n = 2$ der *Flächeninhalt* von $\mathrm{gr}(u)$.

Hinweise:

- Für eine globale Parametrisierung $\psi : \overline{U} \to \mathbb{R}^{n+1}$ gilt

$$\mathrm{Vol}_n(\mathrm{im}(\psi)) = \int_{\overline{U}} \sqrt{\det\big((D\psi)^T D\psi\big)}.$$

  (Siehe Analysis 2.) Definieren Sie eine globale Parametrisierung ψ für $\mathrm{gr}(u)$ mit Hilfe von u.

- Schreiben Sie die gramsche Determinante $(D\psi(x))^T D\psi(x)$ um, indem Sie die Determinantenidentität von Sylvester verwenden:

$$\det\big(\mathbb{1}_n + BA\big) = \det\big(\mathbb{1}_m + AB\big), \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

(ii) Zeigen Sie, dass die "kritischen Punkte" von S genau die Lösungen $u \in C^2(\overline{U}, \mathbb{R})$ der folgenden partiellen Differentialgleichung sind:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) = 0 \qquad \text{auf } U. \tag{3}$$

Hinweis: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung, der besagt, dass die "kritischen Punkte" von S genau die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung für L sind.

(iii) Zeigen Sie: Sei $u \in C^2(\overline{U}, \mathbb{R})$ so, dass der Graph von u minimales n-dimensionales Volumen besitzt unter allen $v \in C^2(\overline{U}, \mathbb{R})$, welche die Randbedingung $v = g$ erfüllen. Dann löst u die PDG (3).

Hinweis: Verwenden Sie ein Korollar aus der Vorlesung.

Bemerkungen:

- Wegen der hier formulierten Eigenschaft heissen die Lösungen der PDG (3) (*parametrisierte*) *Minimalflächen*.[1]
- Zum Beispiel bilden *Seifenblasen* Flächen mit (lokal) minimalem Flächeninhalt, wenn sie über einen geschlossen Draht gespannt werden, der beliebig gekrümmt sein kann.

(iv) Bestimmen Sie im Fall eines konstanten g alle Minimalstellen von S. Überprüfen Sie, dass diese Minimalstellen die PDG (3) lösen.

13.2. Variante der Poisson-Gleichung Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet. Sei $g : \partial U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir definieren $\mathcal{A}$ wie in (1). Finden Sie eine Funktion $L \in C^2\big(\overline{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}\big)$, sodass die "kritischen Punkte" von S_L (definiert wie in (2)) gerade die Lösungen des folgenden Randwertproblems sind:

$$-\Delta u = u \qquad \text{auf } U, \qquad u = g \qquad \text{auf } \partial U$$

Hinweise:

- Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung, der besagt, dass die "kritischen Punkte" von S_L genau die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung für L sind.
- Ändern Sie die Lagrangefunktion des Dirichletfunktionals auf eine geeignete Weise so ab, dass die Euler-Lagrange-Gleichung durch $-\Delta u = u$ gegeben ist.

13.3. "kritischer Punkt" der Wirkung, Euler-Lagrange-Gleichung, Teilchen auf einer Geraden, Wir betrachten ein Teilchen der Masse m auf der Geraden $\mathbb{R}$ unter dem Einfluss einer zeitabhängigen Kraft $\mathbf{F}$. Wir schreiben:

- $t :=$ Zeit
- $q \in \mathbb{R}$: Ort des Teilchens
- $v \in \mathbb{R}$: Geschwindigkeitsvektor des Teilchens

[1] Diese Bezeichnung ist unpräzise, da es sich dabei nur um "kritische Punkte" von S handelt, nicht um globale Minimalstellen.

Wir nehmen an, dass $\mathbf{F}$ konservativ ist, d. h., es gibt eine glatte Funktion $U : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für $U^t := U(t, \cdot)$ gilt

$$\mathbf{F}^t = -\nabla U^t = -(U^t)'.$$

U ist die potentielle Energie des Teilchens. Dieses System kann mittels Variationsrechnung beschrieben werden. Die Dimension n ist hier gleich 1. Seien $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, sodass $t_0 < t_1$. Wir definieren die *Lagrange-Funktion*

$$L : (t_0, t_1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad L(t, q, v) := \frac{m}{2}|v|^2 - U_t(q)$$
$$= \text{kinetische Energie} - \text{potentielle Energie}.$$

Sei $g : \partial(t_0, t_1) = \{t_0, t_1\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir schreiben $q_i := g(t_i)$, für $i = 0, 1$.

(i) Bestimmen Sie das zugehörige Wirkungsfunktional $S := S_{L,g}$.

(ii) Zeigen Sie, dass die "kritischen Punkte" von S genau die Bahnen q sind, die das zweite newtonsche Gesetz erfüllen.

Hinweis: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung, der besagt, dass die "kritischen Punkte" von S genau die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung für L sind. Überprüfen Sie, dass diese Gleichung mit dem zweiten newtonschen Gesetz übereinstimmt.

13.4. "kritischer Punkt" der Wirkung, Euler-Lagrange-Gleichung, elektrischer Schwingkreis Wir betrachten einen elektrischen Schwingkreis, der aus einem Kondensator und einer Spule besteht, die parallelgeschaltet sind. Dieses System kann mittels Variationsrechnung beschrieben werden. Dazu schreiben wir:

- $t :=$ Zeit
- $Q :=$ Ladung des Kondensators
- $I :=$ Stromstärke
- $C :=$ Kapazität des Kondensators
- $L :=$ Induktivität der Spule

Seien $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, sodass $t_0 < t_1$. Wir definieren die *Lagrangefunktion*

$$\mathcal{L} : (t_0, t_1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \mathcal{L}(t, Q, I) := \frac{L}{2}I^2 - \frac{1}{2C}Q^2. \tag{4}$$

Sei $g : \partial(t_0, t_1) = \{t_0, t_1\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir schreiben $Q_i := g(t_i)$, für $i = 0, 1$.

(i) Bestimmen Sie das zugehörige Wirkungsfunktional $S := S_{\mathcal{L},g}$.

(ii) Zeigen Sie, dass die "kritischen Punkte" von S gerade die Lösungen der Gleichung für den elektrischen LC-Schwingkreis sind.[2]

Hinweis: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung, der besagt, dass die "kritischen Punkte" von S genau die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung für $\mathcal{L}$ sind. Überprüfen Sie, dass diese Gleichung mit der Gleichung für den elektrischen LC-Schwingkreis übereinstimmt.

Bemerkung: Die beiden Terme in (4) haben die folgenden Bedeutungen:

$$\begin{aligned} \frac{L}{2}I^2 &= \text{ in Spule gespeicherte Energie des Magnetfeldes,} \\ \frac{1}{2C}Q^2 &= \text{ im Kondensator gespeicherte Energie des elektrischen Feldes.} \end{aligned}$$

13.5. im elektrischen Feld gespeicherte Energie Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt und $g : \partial U \to \mathbb{R}$. Wir definieren $\mathcal{A}$ wie in (1) und das Dirichletfunktional für (f, g) als

$$S := S_{f,g} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, \qquad S(u) := \int_U \left(\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - uf \right).$$

Wir betrachten den Fall $U = \mathbb{R}^3$ und ein statisches elektrisches Feld mit Feldstärke $\mathbf{E}$ und elektrostatischem Potential φ. Zeigen Sie, dass die im elektrischen Feld gespeicherte Energie gegeben ist durch

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathbf{E}\|^2 = \varepsilon_0 S_{f=0,g}(u = \varphi),$$

Hinweise:

- Betrachten Sie zunächst zwei Punktteilchen mit Ladungen q_1, q_2, wobei sich das zweite Teilchen zuerst unendlich weit entfernt befindet. Wir bringen das zwei Teilchen jetzt in die Nähe des ersten. Dazu müssen wir Arbeit verrichten, die der potentiellen Energie entspricht, die wir danach haben. Was ist die Formel für diese Energie? Diese Energie ist jetzt im elektrischen Feld gespeichert.
- Wir wiederholen diesen Prozess, indem wir ein drittes Teilchen aus unendlicher Ferne in die Nähe der anderen zwei Teilchen bringen. Das gibt einen zusätzlichen Beitrag zur potentiellen Energie. Welchen?
- Überlegen Sie sich eine Formel für die potentielle Energie im Fall von n Teilchen.

[2] Wir haben diesen Schwingkreis in Analysis 2 behandelt. Er wurde auch in *Netzwerke und Schaltungen II* behandelt.

- Finden Sie eine Formel für die potentielle Energie für eine allgemeine Ladungsdichte ρ.
- Verwenden Sie das gaußsche Gesetz der Elektrostatik, um die Ladungsdichte umzuschreiben.
- Verwenden Sie, dass $\nabla \cdot (\mathbf{E}\varphi) = (\nabla \cdot \mathbf{E})\varphi + \mathbf{E} \cdot \nabla\varphi$ und den Satz von Gauß. Das Randintegral geht gegen 0, falls wir das Gebiet, worüber wir integrieren, immer grösser wählen. Warum? (Wir nehmen hier an, dass die Ladungen sich in einem beschränkten Gebiet befinden.)