D–MATH

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-1152-02L

Nachname

XX

Vorname

XX

Legi-Nr.

XX-000-000

Prüfungs-Nr.

000

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

1.MC1 [1 Punkt] Seien $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, und $\det : M_{n\times n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ die Determinantenfunktion. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

Let $n \geq 1$, and let $\det : M_{n\times n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ be the determinant function. Which of the following statements is true?

(A) $\det(A^t) = \det(A)$;

(B) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$;

(C) $\det(-\mathbf{1}_n) = -1$.

1.MC2 [1 Punkt] Sei K ein Körper und $n \geq 1$. Eine Matrix $B \in M_{n\times n}(K)$ ist invertierbar genau dann wenn sie n verschiedene Eigenwerte in K hat.

Let K be a field and $n \geq 1$. A matrix $B \in M_{n\times n}(K)$ is invertible if and only if it has n distinct eigenvalues in K.

(A) Wahr / *True*

(B) Falsch / *False*

1.MC3 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1/2 & 2 \\ 6 & 1/2 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$?

Which of the following matrices is the inverse of $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1/2 & 2 \\ 6 & 1/2 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$?

(A) $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(B) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -8 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 1/2 & 2 & -1 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.MC4 [1 Punkt] Betrachte das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{F}_3$.

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + (1-a)z = a \\ 2x + ay = 1 \end{cases}$$

Für welchen Wert von a besitzt das lineare Gleichungssystem Lösungen?

Consider the linear system of equations over $\mathbb{F}_3$.

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + (1-a)z = a \\ 2x + ay = 1 \end{cases}$$

For which values of a does the system have solutions?

(A) Das lineare Gleichungssystem hat für keinen Wert von a Lösungen.
The linear system does not have solutions for any a.

(B) $a \in \{1, 2\}$.

(C) $a \in \{0, 1\}$.

1.MC5 [1 Punkt] Die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

ist über $\mathbb{R}$ linear unabhängig.

The set

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

is linearly independent over $\mathbb{R}$.

(A) Wahr / *True*

(B) Falsch / *False*

1.MC6 [1 Punkt] Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$. Betrachten Sie die Abbildung

$$f : V \to V, \quad p(x) \mapsto x^2 \cdot p''(x) - p'(1) - 2 \cdot p(0).$$

Welche der folgenden Aussagen stimmt?
Let V be the vector space of polynomials of degree ≤ 2 with coefficients in $\mathbb{R}$. Consider the map

$$f : V \to V, \quad p(x) \mapsto x^2 \cdot p''(x) - p'(1) - 2 \cdot p(0).$$

Which of the following statements holds?

(A) f ist keine lineare Abbildung.
f is not a linear map.

(B) Die Eigenwerte von f sind 1, 0 und 2.
The eigenvalues of f are 1, 0 and 2.

(C) In der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ sind $\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t \rangle$ und $\langle \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^t \rangle$ Eigenräume von f.
In the basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$, $\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t \rangle$ and $\langle \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^t \rangle$ are eigenspaces of f.

1.MC7 [1 Punkt] Sei A eine quadratische Matrix mit Koeffizienten in einem Körper K, so dass $AA^t = A^tA$. Welche der folgenden Aussagen ist dann im Allgemeinen **richtig**?
*Let A be a square matrix with coefficients in a field K, such that $AA^t = A^tA$. Which of the following statements is **correct** in general?*

(A) Es gilt $A^t = A$.
$A^t = A$ holds.

(B) Die Eigenwerte von A und A^tA stimmen überein.
The eigenvalues of A and that of A^tA coincide.

(C) Wenn v ein Eigenvektor von A^tA ist, dann ist Av ebenfalls ein Eigenvektor von A^tA.
If v is an eigenvector of A^tA, then Av is also an eigenvector of A^tA.

1.MC8 [1 Punkt] Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ unterschiedliche komplexe Zahlen, und es sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & \\ & & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & \lambda_3 & 1 \\ & & & & & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

die Jordansche Normalenform einer Matrix. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

Let $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ be distinct complex numbers, and let

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & \\ & & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & \lambda_3 & 1 \\ & & & & & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

be the Jordan normal form associated to a matrix. Which of the following is true?

(A) Die algebraische Vielfachheit von λ_1 ist 2.
The algebraic multiplicity of λ_1 equals 2.

(B) Die geometrische Vielfachheit von λ_3 ist 2.
The geometric multiplicity of λ_3 equals 2.

(C) Die geometrische Vielfachheit von λ_1 ist 2.
The geometric multiplicity of λ_1 equals 2.

1.MC9 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ erfüllen die Aussage "Es existiert eine orthonormale Matrix T und eine diagonale Matrix D so dass $\overline{T}^t AT = D$"?

Which of the following matrices $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ satisfies "There exists an orthonormal matrix T and a diagonal matrix D such that $\overline{T}^t AT = D$"?

(A) $\begin{pmatrix} 6 & i & 1-i \\ -i & 1 & -2+2i \\ 1+i & -2-2i & 2 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 4-6i & -4+12i & 4-12i \\ 2-6i & -2+12i & 2-11i \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.MC10 [1 Punkt] Sei $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ der Vektorraum der Polynome mit komplexen Koeffizienten vom Grad höchstens 2 mit der kanonischen Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Betrachte das Funktional $f : V \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$p(x) \mapsto \int_{-1}^{1} p''(x) + p'(0)x + p(1)x^2 dx.$$

Was ist der Koordinatenvektor von f bezüglich der dualen Basis $\mathcal{B}^*$?

Let $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ be the vector space of polynomials with complex coefficients of degree at most 2 and its canonical basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Consider the functional $f : V \to \mathbb{C}$ defined by

$$p(x) \mapsto \int_{-1}^{1} p''(x) + p'(0)x + p(1)x^2 dx.$$

What is the coordinate vector of f with respect to the dual basis $\mathcal{B}^*$?

(A) (2/3, 0, 1)

(B) (2/3, 2/3, 2/3)

(C) (2, 2, 2)

1.MC11 [1 Punkt] Sei $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$. Welche der folgenden Mengen ist eine Basis des Annihilators von $6x^2 + x + 2$ in V^*? Die Koordinaten beziehen sich auf die duale Basis $\{1^*, x^*, (x^2)^*\}$.

Let $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$. Which of the following is a basis for the annihilator of $6x^2 + x + 2$ in V^*? The coordinates are given with respect to the dual basis $\{1^*, x^*, (x^2)^*\}$.

(A) $\left\{\begin{pmatrix}0 & -6 & 1\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\end{pmatrix}^t\right\}$

(B) $\left\{\begin{pmatrix}2 & 1 & 6\end{pmatrix}^t\right\}$

(C) $\left\{\begin{pmatrix}0 & -6 & 1\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\end{pmatrix}^t\right\}$

1.MC12 [1 Punkt] Betrachte den reellen Vektorraum $\mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Welches der folgenden Elemente ist gleich zu dem Tensor

$$\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} \otimes (2i) + \begin{pmatrix}5i\\ 2\end{pmatrix} \otimes 1 + \begin{pmatrix}1+i\\ 2-i\end{pmatrix} \otimes (1-i)?$$

Consider the real vector space $\mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Which of the following elements is equal to the tensor

$$\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} \otimes (2i) + \begin{pmatrix}5i\\ 2\end{pmatrix} \otimes 1 + \begin{pmatrix}1+i\\ 2-i\end{pmatrix} \otimes (1-i)?$$

(A) $\begin{pmatrix}6i+1\\ 4-i\end{pmatrix} \otimes 1 + \begin{pmatrix}1-i\\ 3i-2\end{pmatrix} \otimes i$

(B) $\begin{pmatrix}2+6i\\ 4\end{pmatrix} \otimes (2+i)$

(C) $\begin{pmatrix}1+2i\\ -i\end{pmatrix} \otimes 1 + \begin{pmatrix}6+i\\ 2-3i\end{pmatrix} \otimes i$

1.MC13 [1 Punkt] Betrachte den Vektorraum $C([-1,1])$ der reellwertigen stetigen Funktionen auf $[-1,1]$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx. \end{array}$$

Die orthogonale Projektion von $\cos(\pi x)$ auf die lineare Hülle $U =< 1, 1+2x >$ ist ...

Consider the vector space $C([-1,1])$ of real-valued continuous functions on $[-1,1]$ endowed with the inner product

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx. \end{array}$$

The orthogonal projection of $\cos(\pi x)$ onto the linear span $U =< 1, 1+2x >$ is ...

(A) 0.

(B) 1/2.

(C) $\frac{3}{\pi}x$.

(D) $\frac{1}{2}\sin(\pi x)$.

PRÄAMBEL: In der gesamten Prüfung ist K ein Körper.
Preamble: For this exam, let K be a field.

Aufgabe 2

2.A1 [2 Punkte] Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum über K und $U \subset V$ ein Untervektorraum von V. Definiere den Quotientenraum V/U, und zeige das Addition und Skalarmultiplikation wohldefiniert sind.

2.A2 [2 Punkte] Seien V, W endlichdimensionale K-Vektorräume, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass eine Abbildung $\bar{f} : V/\ker(f) \to W$ existiert, so dass $f = \bar{f} \circ q$, wobei $q : V \to V/\ker(f)$ die Quotientenabbildung ist.

2.A3 [2 Punkte] Beweise oder widerlege die folgende Aussage: sei $A \in M_{n\times n}(K)$, und schreibe $\chi_A(X)$ für das charakteristische Polynom von A. Dann ist $\deg(\chi_A(X))$ gleich der Anzahl der Jordanblöcken von A.

2.A1 [2 Punkte] Let V be a finite-dimensional vector space over K and let $U \subset V$ be a linear subspace of V. Define the quotient space V/U, and show that addition and scalar multiplication are well-defined.

2.A2 [2 Punkte] Let V, W be finite-dimensional K-vector spaces, and let $f : V \to W$ be a linear map. Show that there exists a map $\bar{f} : V/\ker(f) \to W$ such that $f = \bar{f} \circ q$, where $q : V \to V/\ker(f)$ is the quotient map.

2.A3 [2 Punkte] Prove or disprove the following statement: let $A \in M_{n\times n}(K)$, and let us denote by $\chi_A(X)$ the characteristic polynomial of A. Then $\deg(\chi_A(X))$ equals the number of Jordan blocks of A.

Aufgabe 3

In A1 und A2 ist V ein Vektorraum über K.

3.A1 [1 Punkt] Definiere den Dualraum V^*.

3.A2 [3 Punkte] Gegeben eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von V definiere die korrespondierende duale Basis, und zeige, dass sie eine Basis von V^* ist. Es darf *nicht* ohne Beweis irgendeine Aussage über die Dimension von V^* verwendet werden.

3.A3 [3 Punkte] In dieser Teilaufgabe betrachte den reellen Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ mit Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Wir definieren das lineare Funktional

$$\begin{array}{rccc} L: & V & \to & \mathbb{R} \\ & p & \mapsto & \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(p(t) + p'(t))dt \end{array}$$

Schreibe L als Linearkombination der dualen Basis $\mathcal{B}^*$.

3.A4 [3 Punkte] Seien V, W, Z K-Vektorräume und betrachte eine lineare Abbildung $S : V \to W$. Definiere die duale Abbildung von S, geschrieben S^*, und zeige, dass sie linear ist. Ausserdem beweise, dass für jede lineare Abbildung $T : W \to Z$ gilt:

$$(T \circ S)^* = S^* \circ T^*.$$

In A1 and A2, V is a vector space over K.

3.A1 [1 Punkt] Define the dual space V^*.

3.A2 [3 Punkte] Given a basis $v_1, \dots, v_n$ of V define its dual basis, and show that it is a basis of V^*. You may *not* use without proof any result about the dimension of V^*.

3.A3 [3 Punkte] For this subquestion, let $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ with basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ considered as a real vector space. We define the linear functional

$$\begin{array}{rccc} L: & V & \to & \mathbb{R} \\ & p & \mapsto & \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(p(t) + p'(t))dt \end{array}$$

Write L as a linear combination of the dual basis $\mathcal{B}^*$.

3.A4 [3 Punkte] Let V, W, Z be K-vector spaces and consider a linear map $S : V \to W$. Define the dual map of S, denoted by S^*, and show that it is linear. Additionally prove that for any linear map $T : W \to Z$, we have

$$(T \circ S)^* = S^* \circ T^*.$$

Aufgabe 4

4.A1 [5 Punkte] Seien $m, n \geq 1$, und betrachte die Vektorräume $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Sei nun $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ und nehme an, dass $m > n > 0$ und $\operatorname{rank}(A) = n$ ist. Zeige, dass A^*A invertierbar ist, wobei A^* die Adjunkte Matrix von A ist.

4.A2 [2 Punkte] Gilt dies immer noch wenn wir $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzen?

4.A3 [2 Punkte] In der Situation über $\mathbb{C}$, welche Eigenschaft haben die Eigenvektoren von A^*A? Was gilt für die Eigenwerte?

4.A1 [5 Punkte] Let $m, n \geq 1$, and consider the vector spaces $\mathbb{R}^m$ and $\mathbb{R}^n$ with the standard inner products. Assume that $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ with $m > n > 0$ such that $\operatorname{rank}(A) = n$. Show that A^*A is invertible, where A^* denotes the adjoint matrix of A.

4.A2 [2 Punkte] Does the above still hold if we replace $\mathbb{R}$ by $\mathbb{C}$?

4.A3 [2 Punkte] Still taking the field to be $\mathbb{C}$, what property do the eigenvectors of A^*A satisfy? And what can you say about its eigenvalues?

Aufgabe 5

5.A1 [3 Punkte] Seien U, V Vektorräume über K mit $\dim(U) = m$ und $\dim(V) = n$. Konstruiere einen Vektorraum W der Dimension $m \cdot n$ und eine Abbildung $\eta : U \times V \to W$ so dass für alle K-Vektorräume Z mit einer bilinearen Abbildung $\phi : U \times V \to Z$ eine eindeutige lineare Abbildung $\psi : W \to Z$ existiert mit

$$\psi \circ \eta(v, w) = \phi(v, w).$$

5.A2 [4 Punkte] Definiere das r-fache symmetrische Produkt von V und das r-fache alternierende Produkt von V. Zeige ausserdem, dass

$$V \otimes V = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Alt}^2(V).$$

5.A3 [3 Punkte] Finde für $V = \mathbb{R}^2$ eine Basis von $\mathrm{Sym}^2(V)$ und von $\mathrm{Alt}^2(V)$.

5.A1 [3 Punkte] Let U, V be vector spaces over K with $\dim(U) = m$ and $\dim(V) = n$. Construct a vector space W of dimension $m \cdot n$ and a map $\eta : U \times V \to W$ such that for all K-vector spaces Z with a bilinear map $\phi : U \times V \to Z$ there exists a unique linear map $\psi : W \to Z$ such that

$$\psi \circ \eta(v, w) = \phi(v, w).$$

5.A2 [4 Punkte] Give the definition of the r-fold symmetric product of a vector space V and of the r-fold alternating product of V. Additionally, show that

$$V \otimes V = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Alt}^2(V).$$

5.A3 [3 Punkte] For $V = \mathbb{R}^2$, find a basis of $\mathrm{Sym}^2(V)$ and one of $\mathrm{Alt}^2(V)$.

Aufgabe 6

6.A1 [1 Punkt] Sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Definiere das Minimalpolynom von A.

6.A2 [5 Punkte] Sei $K = \mathbb{C}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Jordannormalform von A.

6.A3 [2 Punkte] Berechne das Minimalpolynom von A. Wenn die vorherige Aufgabe nicht gelöst wurde, berechne das Minimalpolynom von

$$B' := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

6.A1 [1 Punkt] Let $A \in M_{n\times n}(K)$. Recall the definition of the minimal polynomial of A.

6.A2 [5 Punkte] Now let $K = \mathbb{C}$ and

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Compute the Jordan normal form of A.

6.A3 [2 Punkte] Compute the minimal polynomial of A. If the previous exercise was not solved, compute the minimal polynomial of

$$B' := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

Betrachte die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^4$ versehen mit dem Standardskalarprodukt

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und sei U die lineare Hülle von v_1, v_2, v_3.

7.A1 [2 Punkte] Berechne die Dimension von U.

7.A2 [4 Punkte] Wende das Gram-Schmidt Verfahren auf die Vektoren (v_1, v_2, v_3) an um eine orthonormale Basis von U zu berechnen.

Consider the following vectors in $\mathbb{R}^4$ endowed with the standard inner product:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

and let U be the linear span of v_1, v_2, v_3.

7.A1 [2 Punkte] Compute the dimension of U.

7.A2 [4 Punkte] Apply the Gram-Schmidt process to the vectors (v_1, v_2, v_3) to construct an orthonormal basis of U.