Aufgaben und Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

1.MC1 [1 Punkt] Seien $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, und $\det : M_{n\times n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ die Determinantenfunktion. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

Let $n \geq 1$, and let $\det : M_{n\times n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ be the determinant function. Which of the following statements is true?

(A) **TRUE:** $\det(A^t) = \det(A)$;

(B) **FALSE:** $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$;

(C) **FALSE:** $\det(-\mathbf{1}_n) = -1$.

1.MC2 [1 Punkt] Sei K ein Körper und $n \geq 1$. Eine Matrix $B \in M_{n\times n}(K)$ ist invertierbar genau dann wenn sie n verschiedene Eigenwerte in K hat.

Let K be a field and $n \geq 1$. A matrix $B \in M_{n\times n}(K)$ is invertible if and only if it has n distinct eigenvalues in K.

(A) **FALSE:** Wahr / *True*

(B) **TRUE:** Falsch / *False*

1.MC3 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1/2 & 2 \\ 6 & 1/2 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$?

Which of the following matrices is the inverse of $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1/2 & 2 \\ 6 & 1/2 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$?

(A) **FALSE:** $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(B) **TRUE:** $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -8 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(C) **FALSE:** $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 1/2 & 2 & -1 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.MC4 [1 Punkt] Betrachte das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{F}_3$.

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + (1-a)z = a \\ 2x + ay = 1 \end{cases}$$

Für welchen Wert von a besitzt das lineare Gleichungssystem Lösungen?

Consider the linear system of equations over $\mathbb{F}_3$.

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + (1-a)z = a \\ 2x + ay = 1 \end{cases}$$

For which values of a does the system have solutions?

(A) **FALSE:** Das lineare Gleichungssystem hat für keinen Wert von a Lösungen.
The linear system does not have solutions for any a.

(B) **TRUE:** $a \in \{1, 2\}$.

(C) **FALSE:** $a \in \{0, 1\}$.

1.MC5 [1 Punkt] Die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

ist über $\mathbb{R}$ linear unabhängig.

The set

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

is linearly independent over $\mathbb{R}$.

(A) **TRUE:** Wahr / *True*

(B) **FALSE:** Falsch / *False*

1.MC6 [1 Punkt] Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$. Betrachten Sie die Abbildung

$$f : V \to V, \quad p(x) \mapsto x^2 \cdot p''(x) - p'(1) - 2 \cdot p(0).$$

Welche der folgenden Aussagen stimmt?
Let V be the vector space of polynomials of degree ≤ 2 with coefficients in $\mathbb{R}$. Consider the map

$$f : V \to V, \quad p(x) \mapsto x^2 \cdot p''(x) - p'(1) - 2 \cdot p(0).$$

Which of the following statements holds?

(A) **FALSE:** f ist keine lineare Abbildung.
f is not a linear map.

(B) **FALSE:** Die Eigenwerte von f sind 1, 0 und 2.
The eigenvalues of f are 1, 0 and 2.

(C) **TRUE:** In der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ sind $\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t \rangle$ und $\langle \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^t \rangle$ Eigenräume von f.
In the basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$, $\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t \rangle$ and $\langle \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^t \rangle$ are eigenspaces of f.

1.MC7 [1 Punkt] Sei A eine quadratische Matrix mit Koeffizienten in einem Körper K, so dass $AA^t = A^tA$. Welche der folgenden Aussagen ist dann im Allgemeinen **richtig**?
*Let A be a square matrix with coefficients in a field K, such that $AA^t = A^tA$. Which of the following statements is **correct** in general?*

(A) **FALSE:** Es gilt $A^t = A$.
$A^t = A$ holds.

(B) **FALSE:** Die Eigenwerte von A und A^tA stimmen überein.
The eigenvalues of A and that of A^tA coincide.

(C) **TRUE:** Wenn v ein Eigenvektor von A^tA ist, dann ist Av ebenfalls ein Eigenvektor von A^tA.
If v is an eigenvector of A^tA, then Av is also an eigenvector of A^tA.

1.MC8 [1 Punkt] Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ unterschiedliche komplexe Zahlen, und es sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & \\ & & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & \lambda_3 & 1 \\ & & & & & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

die Jordansche Normalenform einer Matrix. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

Let $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ be distinct complex numbers, and let

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & \\ & & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & \lambda_3 & 1 \\ & & & & & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

be the Jordan normal form associated to a matrix. Which of the following is true?

(A) **FALSE:** Die algebraische Vielfachheit von λ_1 ist 2.
The algebraic multiplicity of λ_1 equals 2.

(B) **FALSE:** Die geometrische Vielfachheit von λ_3 ist 2.
The geometric multiplicity of λ_3 equals 2.

(C) **TRUE:** Die geometrische Vielfachheit von λ_1 ist 2.
The geometric multiplicity of λ_1 equals 2.

1.MC9 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ erfüllen die Aussage "Es existiert eine orthonormale Matrix T und eine diagonale Matrix D so dass $\overline{T}^t AT = D$"?

Which of the following matrices $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ satisfies "There exists an orthonormal matrix T and a diagonal matrix D such that $\overline{T}^t AT = D$"?

(A) **TRUE:** $\begin{pmatrix} 6 & i & 1-i \\ -i & 1 & -2+2i \\ 1+i & -2-2i & 2 \end{pmatrix}$

(B) **FALSE:** $\begin{pmatrix} 4-6i & -4+12i & 4-12i \\ 2-6i & -2+12i & 2-11i \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$

(C) **FALSE:** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.MC10 [1 Punkt] Sei $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ der Vektorraum der Polynome mit komplexen Koeffizienten vom Grad höchstens 2 mit der kanonischen Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Betrachte das Funktional $f : V \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$p(x) \mapsto \int_{-1}^{1} p''(x) + p'(0)x + p(1)x^2 dx.$$

Was ist der Koordinatenvektor von f bezüglich der dualen Basis $\mathcal{B}^*$?

Let $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ be the vector space of polynomials with complex coefficients of degree at most 2 and its canonical basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Consider the functional $f : V \to \mathbb{C}$ defined by

$$p(x) \mapsto \int_{-1}^{1} p''(x) + p'(0)x + p(1)x^2 dx.$$

What is the coordinate vector of f with respect to the dual basis $\mathcal{B}^*$?

(A) **FALSE:** (2/3, 0, 1)

(B) **TRUE:** (2/3, 2/3, 2/3)

(C) **FALSE:** (2, 2, 2)

1.MC11 [1 Punkt] Sei $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$. Welche der folgenden Mengen ist eine Basis des Annihilators von $6x^2 + x + 2$ in V^*? Die Koordinaten beziehen sich auf die duale Basis $\{1^*, x^*, (x^2)^*\}$.

Let $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$. Which of the following is a basis for the annihilator of $6x^2 + x + 2$ in V^*? The coordinates are given with respect to the dual basis $\{1^*, x^*, (x^2)^*\}$.

(A) **TRUE:** $\left\{\begin{pmatrix}0 & -6 & 1\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\end{pmatrix}^t\right\}$

(B) **FALSE:** $\left\{\begin{pmatrix}2 & 1 & 6\end{pmatrix}^t\right\}$

(C) **FALSE:** $\left\{\begin{pmatrix}0 & -6 & 1\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\end{pmatrix}^t\right\}$

1.MC12 [1 Punkt] Betrachte den reellen Vektorraum $\mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Welches der folgenden Elemente ist gleich zu dem Tensor

$$\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} \otimes (2i) + \begin{pmatrix}5i\\ 2\end{pmatrix} \otimes 1 + \begin{pmatrix}1+i\\ 2-i\end{pmatrix} \otimes (1-i)?$$

Consider the real vector space $\mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Which of the following elements is equal to the tensor

$$\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} \otimes (2i) + \begin{pmatrix}5i\\ 2\end{pmatrix} \otimes 1 + \begin{pmatrix}1+i\\ 2-i\end{pmatrix} \otimes (1-i)?$$

(A) **TRUE:** $\begin{pmatrix}6i+1\\ 4-i\end{pmatrix} \otimes 1 + \begin{pmatrix}1-i\\ 3i-2\end{pmatrix} \otimes i$

(B) **FALSE:** $\begin{pmatrix}2+6i\\ 4\end{pmatrix} \otimes (2+i)$

(C) **FALSE:** $\begin{pmatrix}1+2i\\ -i\end{pmatrix} \otimes 1 + \begin{pmatrix}6+i\\ 2-3i\end{pmatrix} \otimes i$

1.MC13 [1 Punkt] Betrachte den Vektorraum $C([-1,1])$ der reellwertigen stetigen Funktionen auf $[-1,1]$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx. \end{array}$$

Die orthogonale Projektion von $\cos(\pi x)$ auf die lineare Hülle $U =< 1, 1+2x >$ ist ...

Consider the vector space $C([-1,1])$ of real-valued continuous functions on $[-1,1]$ endowed with the inner product

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx. \end{array}$$

The orthogonal projection of $\cos(\pi x)$ onto the linear span $U =< 1, 1+2x >$ is ...

(A) **TRUE:** 0.

(B) **FALSE:** 1/2.

(C) **FALSE:** $\frac{3}{\pi}x$.

(D) **FALSE:** $\frac{1}{2}\sin(\pi x)$.

PRÄAMBEL: In der gesamten Prüfung ist K ein Körper.
Preamble: For this exam, let K be a field.

Aufgabe 2

2.A1 [2 Punkte] Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum über K und $U \subset V$ ein Untervektorraum von V. Definiere den Quotientenraum V/U, und zeige das Addition und Skalarmultiplikation wohldefiniert sind.

Lösung:

Wir definieren den Quotientenraum V/U wie folgt: die Elemente von V/U sind die Nebenklassen von U in V. Die Addition und Skalarmultiplikation sind definiert durch

$$[y_1] + [v_2] = [v_1 + v_2] \quad \text{und} \quad \alpha[v] = [\alpha v]$$

Als nächstens zeigen wir, dass Addition und Multiplikation wohldefiniert sind:

(i) es seien $v_1, v_1', v_2, v_2' \in V$, und nimm an, dass $[v_1] = [v_1']$ und $[v_2] = [v_2']$. Wir muessen zeigen, dass

$$[v_1] + [v_2] = [v_1'] + [v_2'] \quad \Leftrightarrow \quad [v_1 + v_2] = [v_1' + v_2'] \quad \Leftrightarrow \quad v_1 + v_2 - v_1' - v_2' \in U$$

Doch das ist klar, da $v_1 - v_1' \in U$ und $v_2 - v_2' \in U$.

(ii) Es seien $v, v' \in V$ so dass $[v] = [v']$, und es sei $\alpha \in K$. Wir mussen zeigen, dass

$$\alpha[v] = \alpha\,[v'] \quad \Leftrightarrow \quad [\alpha v] = [\alpha v'] \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\,(v - v') \in U$$

Doch da $v - v' \in U$ und U ein Unterraum ist, gilt $\alpha\,(v - v') \in U$.

2.A2 [2 Punkte] Seien V, W endlichdimensionale K-Vektorräume, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass eine Abbildung $\bar{f} : V/\ker(f) \to W$ existiert, so dass $f = \bar{f} \circ q$, wobei $q : V \to V/\ker(f)$ die Quotientenabbildung ist.

Lösung:

Siehe Theorem 7.2.1 der Vorlesung.

2.A3 [2 Punkte] Beweise oder widerlege die folgende Aussage: sei $A \in M_{n\times n}(K)$, und schreibe $\chi_A(X)$ für das charakteristische Polynom von A. Dann ist $\deg(\chi_A(X))$ gleich der Anzahl der Jordanblöcken von A.

Lösung:

Consider the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

It has one Jordan block but its characteristic polynomial is given by

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & 1-X \end{pmatrix} = (1-X)^2$$

has degree 2.

2.A1 [2 Punkte] Let V be a finite-dimensional vector space over K and let $U \subset V$ be a linear subspace of V. Define the quotient space V/U, and show that addition and scalar multiplication are well-defined.

2.A2 [2 Punkte] Let V, W be finite-dimensional K-vector spaces, and let $f : V \to W$ be a linear map. Show that there exists a map $\bar{f} : V/\ker(f) \to W$ such that $f = \bar{f} \circ q$, where $q : V \to V/\ker(f)$ is the quotient map.

2.A3 [2 Punkte] Prove or disprove the following statement: let $A \in M_{n\times n}(K)$, and let us denote by $\chi_A(X)$ the characteristic polynomial of A. Then $\deg(\chi_A(X))$ equals the number of Jordan blocks of A.

Aufgabe 3

In A1 und A2 ist V ein Vektorraum über K.

3.A1 [1 Punkt] Definiere den Dualraum V^*.

Lösung:

By definition,
$$V^* = \{\ell : V \to K \mid \ell \text{ is linear}\}.$$

3.A2 [3 Punkte] Gegeben eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V definiere die korrespondierende duale Basis, und zeige, dass sie eine Basis von V^* ist. Es darf *nicht* ohne Beweis irgendeine Aussage über die Dimension von V^* verwendet werden.

Lösung:

See Satz 6.2.5.

3.A3 [3 Punkte] In dieser Teilaufgabe betrachte den reellen Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ mit Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Wir definieren das lineare Funktional

$$\begin{aligned} L : \quad V &\to \quad \mathbb{R} \\ p &\mapsto \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(p(t) + p'(t))dt \end{aligned}$$

Schreibe L als Linearkombination der dualen Basis $\mathcal{B}^*$.

Lösung:

We compute

$$\begin{aligned} L(1) &= 1 \\ L(x) &= 1 \\ L(x^2) &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Hence, $L = 1^* + x^* + \frac{1}{3} \cdot (x^2)^*$.

3.A4 [3 Punkte] Seien V, W, Z K-Vektorräume und betrachte eine lineare Abbildung $S : V \to W$. Definiere die duale Abbildung von S, geschrieben S^*, und zeige, dass sie linear ist. Ausserdem beweise, dass für jede lineare Abbildung $T : W \to Z$ gilt:

$$(T \circ S)^* = S^* \circ T^*.$$

Lösung:

The dual map $S^* : W^* \to V^*$ is defined as

$$S^*(\ell) = \ell \circ S, \ \forall \ell \in W^*.$$

Let $\ell, m \in W^*$, $\alpha, \beta \in K$, and $v \in V$. Then,

$$\begin{aligned} S^*(\alpha\ell + \beta m)(v) &= (\alpha\ell + \beta m)(S(v)) \\ &= \alpha \cdot \ell(S(v)) + \beta \cdot m(S(v)) \\ &= \alpha S^*(\ell)(v) + \beta S^*(m)(v). \end{aligned}$$

Since this holds for all $v \in V$, we conclude that S^* is linear. Now, let $\ell \in Z^*$. By definition,

$$(T \circ S)^*(\ell) = \ell \circ (T \circ S).$$

On the other hand,

$$(S^* \circ T^*)(\ell) = S^*(\ell \circ T) = \ell \circ T \circ S = (T \circ S)^*(\ell).$$

To obtain the last equality, we used the associativity of composition.

In A1 and A2, V is a vector space over K.

3.A1 [1 Punkt] Define the dual space V^*.

3.A2 [3 Punkte] Given a basis $v_1, \dots, v_n$ of V define its dual basis, and show that it is a basis of V^*. You may *not* use without proof any result about the dimension of V^*.

3.A3 [3 Punkte] For this subquestion, let $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ with basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ considered as a real vector space. We define the linear functional

$$\begin{aligned} L: \ V &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (p(t) + p'(t))dt \end{aligned}$$

Write L as a linear combination of the dual basis $\mathcal{B}^*$.

3.A4 [3 Punkte] Let V, W, Z be K-vector spaces and consider a linear map $S : V \to W$. Define the dual map of S, denoted by S^*, and show that it is linear. Additionally prove that for any linear map $T : W \to Z$, we have

$$(T \circ S)^* = S^* \circ T^*.$$

Aufgabe 4

4.A1 [5 Punkte] Seien $m, n \geq 1$, und betrachte die Vektorräume $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Sei nun $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ und nehme an, dass $m > n > 0$ und $\operatorname{rank}(A) = n$ ist. Zeige, dass A^*A invertierbar ist, wobei A^* die Adjunkte Matrix von A ist.

Lösung:

For a real vector space, we have $A^* = A^T$. We first observe that for all $v \in \mathbb{R}^n$

$$Av = 0 \iff A^T Av = 0.$$

The forward implication is direct. For the backward implication, assume that $A^*Av = 0$. It follows that

$$v^T A^T Av = 0 \Leftrightarrow (Av)^T Av = 0 \Leftrightarrow Av = 0,$$

by positivity of the standard inner product on $\mathbb{R}^m$. Now, since $\operatorname{rank}(A) = n$, the map $v \in \mathbb{R}^n \mapsto Av \in \mathbb{R}^m$ is injective. Therefore, by the above observation, $v \in \mathbb{R}^n \mapsto A^T Av \in \mathbb{R}^n$ is injective and therefore invertible since it is an injective map of vector spaces of the same dimension.

4.A2 [2 Punkte] Gilt dies immer noch wenn wir $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzen?

Lösung:

In this case, the adjoint is given by $\overline{A}^T$. We prove $Av = 0 \iff \overline{A}^T Av = 0$ similarly: if $\overline{A}^T Av = 0$, then

$$0 = \langle v, \overline{A}^T Av \rangle = \langle Av, Av \rangle \Leftrightarrow Av = 0.$$

The rest of the proof follows.

4.A3 [2 Punkte] In der Situation über $\mathbb{C}$, welche Eigenschaft haben die Eigenvektoren von A^*A? Was gilt für die Eigenwerte?

Lösung:

The matrix A^*A defines a self-adjoint automorphism of $\mathbb{C}^n$. By the spectral theorem for complex vector spaces, it admits an orthonormal basis of eigenvectors. Additionally, since it is self-adjoint and an isomorphism, its eigenvalues are real and non-vanishing.

4.A1 [5 Punkte] Let $m, n \geq 1$, and consider the vector spaces $\mathbb{R}^m$ and $\mathbb{R}^n$ with the standard inner products. Assume that $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ with $m > n > 0$ such that $\operatorname{rank}(A) = n$. Show that A^*A is invertible, where A^* denotes the adjoint matrix of A.

4.A2 [2 Punkte] Does the above still hold if we replace $\mathbb{R}$ by $\mathbb{C}$?

4.A3 [2 Punkte] Still taking the field to be $\mathbb{C}$, what property do the eigenvectors of A^*A satisfy? And what can you say about its eigenvalues?

Aufgabe 5

5.A1 [3 Punkte] Seien U, V Vektorräume über K mit $\dim(U) = m$ und $\dim(V) = n$. Konstruiere einen Vektorraum W der Dimension $m \cdot n$ und eine Abbildung $\eta : U \times V \to W$ so dass für alle K-Vektorräume Z mit einer bilinearen Abbildung $\phi : U \times V \to Z$ eine eindeutige lineare Abbildung $\psi : W \to Z$ existiert mit

$$\psi \circ \eta(v, w) = \phi(v, w).$$

Lösung:

Let $\{e_1, \ldots, e_m\}$, respectively $\{f_1, \ldots, f_n\}$, be a basis of U, respectively V, and define the set

$$S := \{e_i \otimes f_j \mid 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}.$$

We claim that the vector space $W := K(S)$ satisfies the required properties. Define the map

$$\begin{array}{cccc} \eta : & U \times V & \to & W \\ & (\sum_i a_i e_i, \sum_j b_j f_j) & \mapsto & \sum_{i,j} a_i b_j (e_i \otimes f_j) \end{array}$$

It is not hard to see that this map is linear. Consider a vector space Z and a bilinear map $\phi : U \times V \to Z$. Define $\psi : W \to Z$ defined on the basis as $e_i \otimes f_j \mapsto \phi(e_i, f_j)$ and extended linearly. It immediately follows that

$$\begin{aligned} \psi \circ \eta(u, v) &= \psi(\sum_{i,j} a_i b_j (e_i \otimes b_j)) \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j \psi(e_i \otimes f_j) \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j \phi(e_i, f_j) \\ &= \phi(u, v). \end{aligned}$$

5.A2 [4 Punkte] Definiere das r-fache symmetrische Produkt von V und das r-fache alternierende Produkt von V. Zeige ausserdem, dass

$$V \otimes V = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Alt}^2(V).$$

Lösung:

Let $\sigma \in S_2$. For a pure $v_1 \otimes v_2 \in V \otimes V$, we let $\sigma(v_1 \otimes v_2) = v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)}$ and extend this linearly to a map on $V \otimes V$. Then

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}_2(V) &= \{v \in V \otimes V \mid \sigma(v) = v\ \forall \sigma \in S_2\} \\ \mathrm{Alt}_2(V) &= \{v \in V \otimes V \mid \sigma(v) = \mathrm{sgn}(\sigma) v\ \forall \sigma \in S_2\} \end{aligned}$$

For the rest, see Satz 19.9,14.

5.A3 [3 Punkte] Finde für $V = \mathbb{R}^2$ eine Basis von $\mathrm{Sym}^2(V)$ und von $\mathrm{Alt}^2(V)$.

Lösung:

We know that $\dim(V \otimes V) = 4$. The only non-trivial operation in S_2 is the transposition $(1\ 2)$. Hence $v_1 \otimes v_2 \in \mathrm{Sym}_2(V) \implies v_1 = v_2$. It follows that $e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2 \in \mathrm{Sym}_2(V)$. If we look at tensors that are not pure, we find that $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \in \mathrm{Sym}_2$. These three tensors are linearly independent, to see this you can write them in coordinates with respect to the basis

$$\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}.$$

On the other hand, $v_1 \otimes v_2 \in \mathrm{Alt}_2 \implies v_2 = -v_1 \wedge v_2 = v_1$. Hence, no pure tensor can belong to Alt_2. We find that $e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \in \mathrm{Alt}_2$. By the above,

$$\dim(V \otimes V) = \dim(\mathrm{Sym}_2) + \dim(\mathrm{Alt}_2).$$

Hence we have found a basis for Sym_2 and Alt_2.

5.A1 [3 Punkte] Let U, V be vector spaces over K with $\dim(U) = m$ and $\dim(V) = n$. Construct a vector space W of dimension $m \cdot n$ and a map $\eta : U \times V \to W$ such that for all K-vector spaces Z with a bilinear map $\phi : U \times V \to Z$ there exists a unique linear map $\psi : W \to Z$ such that

$$\psi \circ \eta(v, w) = \phi(v, w).$$

5.A2 [4 Punkte] Give the definition of the r-fold symmetric product of a vector space V and of the r-fold alternating product of V. Additionally, show that

$$V \otimes V = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Alt}^2(V).$$

5.A3 [3 Punkte] For $V = \mathbb{R}^2$, find a basis of $\mathrm{Sym}^2(V)$ and one of $\mathrm{Alt}^2(V)$.

Aufgabe 6

6.A1 [1 Punkt] Sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Definiere das Minimalpolynom von A.

Lösung:

The minimal polynonoial of A is the monic polynomial $p \in K[x]$ of smallest degree such that $p(A) = 0$.

6.A2 [5 Punkte] Sei $K = \mathbb{C}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Jordannormalform von A.

Lösung:

We compute the characteristic polynomial and obtain

$$\chi_A(x) = -x^5 + 10x^4 - 38x^3 + 68x^2 - 57x + 18.$$

We plug in 1 an observes that it is a root, hence

$$\chi_A(x) = (x-1)(-x^4 + 9x^3 - 29x^2 + 39x - 18).$$

We notice that 1 is still a root of the second polynomial in the factorization:

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= (x-1)^2(-x^3 + 8x^2 - 21x + 18) \\ &= (x-1)^2(x-2)(-x^2 + 6x - 9) \\ &= (x-1)^2(x-2)(x-3)^2. \end{aligned}$$

We now need to compute the geometric multiplicities of the eigenvalues. We know that $m_g(2) = 1$ since $m_a(2) = 1$. Using Gauss elimination, for example, we find that

$$\dim(\ker(A - \mathrm{Id})) = 1,\ \dim(\ker(A - 3 \cdot \mathrm{Id})) = 2.$$

Hence the Jordan normal form associated to A is given by (up to block permutations):

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

6.A3 [2 Punkte] Berechne das Minimalpolynom von A. Wenn die vorherige Aufgabe nicht gelöst wurde, berechne das Minimalpolynom von

$$B' := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

For A, we have

$$m_A(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)$$

since the powers appearing in the factorization of the minimal polynonmial correspond to the size of the largest block associated to each eigenvalue.

For the same reason, we find

$$m_{B'}(x) = (x-3)^3(x-7)(x+3).$$

6.A1 [1 Punkt] Let $A \in M_{n\times n}(K)$. Recall the definition of the minimal polynomial of A.

6.A2 [5 Punkte] Now let $K = \mathbb{C}$ and

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Compute the Jordan normal form of A.

6.A3 [2 Punkte] Compute the minimal polynomial of A. If the previous exercise was not solved, compute the minimal polynomial of

$$B' := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

Betrachte die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^4$ versehen mit dem Standardskalarprodukt

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix},$$

und sei U die lineare Hülle von v_1, v_2, v_3.

7.A1 [2 Punkte] Berechne die Dimension von U.

Lösung:

This is tantamount to computing the rank of the matrix

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\\1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

which we achieve using Gaussian elimination. We have

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\\1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & -1 & 1\\0 & -2 & -2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & -1 & 1\\0 & 0 & -4\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Hence $\dim(U) = 3$.

7.A2 [4 Punkte] Wende das Gram-Schmidt Verfahren auf die Vektoren (v_1, v_2, v_3) an um eine orthonormale Basis von U zu berechnen.

Lösung:

We let u_1 be the normalization of v_1, i.e.

$$u_1 := \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Then, we compute

$$w_2 := v_2 - \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

So, we define $u_2 := \frac{1}{\|w_2\|} w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} w_2$. Finally,

$$w_3 := v_3 - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle u_1 - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle u_2$$

$$= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

We let u_3 be its normalization, i.e.

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Consider the following vectors in $\mathbb{R}^4$ endowed with the standard inner product:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

and let U be the linear span of v_1, v_2, v_3.

7.A1 [2 Punkte] Compute the dimension of U.

7.A2 [4 Punkte] Apply the Gram-Schmidt process to the vectors (v_1, v_2, v_3) to construct an orthonormal basis of U.