Serie 10

1. Beweisen Sie die folgenden Aussage: Für zwei beliebige lineare Abbildungen $f\colon V' \to V$ und $g\colon W \to W'$ ist die Abbildung

$$C_{g,f} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V', W'), \quad h \mapsto g \circ h \circ f$$

wohldefiniert und linear. Sind zudem f und g Isomorphismen, so auch $C_{g,f}$.

2. Es seien U, V, W Vektorräume ueber K, und es seien $T : U \to V$ und $S : V \to W$ lineare Abbildungen. Dann gilt

$$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*.$$

3. Sei U ein beliebiger Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass es ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbestimmten gibt, dessen Lösungsmenge genau U ist.

4. (a) Sei V' ein Unterraum eines K-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass jede Linearform auf V' eine Fortsetzung zu einer Linearform auf V besitzt.

   (b) Sei $V = V_1 \oplus V_2$. Konstruieren Sie einen Isomorphismus

   $$V^* \cong V_1^* \oplus V_2^*$$

   und beweisen Sie somit die Existenz eines solchen.

5. Finden Sie die Annulatoren der folgenden Unterräume

   (a) $U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \leqslant \mathbb{R}^2$

   (b) $U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leqslant \mathbb{R}^3$

   (c) $U_3 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \leqslant \mathbb{R}^3$

   (d) $U_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \leqslant \mathbb{R}^4$

6. Sei A die folgende (3×3)-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Berechnen Sie den Annulator von $(\mathrm{im}(T_A^*))$.

7. Bestimmen Sie die Ränge der folgenden $(n \times n)$-Matrizen in Abhängigkeit der positiven ganzen Zahl n.

   (a) $(k\ell\,)_{k,\ell=1,\dots,n}$

   (b) $\big((-1)^{k+\ell}\,(k+\ell-1)\big)_{k,\ell=1,\dots,n}$

   (c) $\left(\dfrac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!}\right)_{k,\ell=0,\dots,n-1}$