Lösungen 10

1. Beweisen Sie die folgenden Aussage: Für zwei beliebige lineare Abbildungen $f\colon V' \to V$ und $g\colon W \to W'$ ist die Abbildung

$$C_{g,f} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V', W'), \quad h \mapsto g \circ h \circ f$$

wohldefiniert und linear. Sind zudem f und g Isomorphismen, so auch $C_{g,f}$.

Solution:

Sei $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ein beliebiges Element. Dann ist die Abbildung

$$g \circ h \circ f : V' \to W'$$

als Verknüpfung der linearen Abbildungen f und h und g wieder linear und liegt also in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V', W')$. Das zeigt, dass $C_{g,f}$ wohldefiniert ist.

Seien nun $h_1, h_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $c \in K$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} C_{g,f}(h_1 + h_2)(v') &= g \circ (h_1 + h_2) \circ f(v') \\ &= g((h_1 + h_2)(f(v'))) \\ &= g(h_1(f(v')) + h_2(f(v'))) \\ &= g(h_1(f(v'))) + g(h_2(f(v'))) \\ &= C_{g,f}(h_1)(v') + C_{g,f}(h_2)(v') \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} C_{g,f}(c \cdot h_1)(v') &= g(c \cdot h_1(f(v'))) \\ &= c \cdot g(h_1(f(v'))) \\ &= c \cdot C_{g,f}(h_1)(v') \\ &= (c \cdot C_{g,f}(h_1))(v') \end{aligned}$$

für alle $v' \in V'$, woraus folgt:

$$\begin{aligned} C_{g,f}(h_1 + h_2) &= C_{g,f}(h_1) + C_{g,f}(h_2) \\ C_{g,f}(c \cdot h_1) &= c \cdot C_{g,f}(h_1)\,. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass $C_{g,f}$ linear ist.

Seien nun f und g Isomorphismen mit Inversen f^{-1} beziehungsweise g^{-1}. Da f^{-1} und g^{-1} linear sind, ist die Abbildung

$$C_{g^{-1},f^{-1}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\, K(V', W') \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$$

wohldefiniert und linear. Aus $f^{-1} \circ f = \operatorname{id} V'$ und $g^{-1} \circ g = \operatorname{id}_W$ folgt dann

$$\begin{aligned} C_{g^{-1},f^{-1}} \circ C_{g,f} &= \operatorname{id}_{\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)} \\ C_{g,f} \circ C_{g^{-1},f^{-1}} &= \operatorname{id}_{\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V',W')}, \end{aligned}$$

die Abbildung $C_{g^{-1},f^{-1}}$ ist also eine Inverse zu $C_{g,f}$.

2. Es seien U, V, W Vektorräume ueber K, und es seien $T : U \to V$ und $S : V \to W$ lineare Abbildungen. Dann gilt

$$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*.$$

Solution: Zunächst betrachten wir die Definitions- und Zielbereiche der Abbildungen:

- $T : U \to V$ und $S : V \to W$
- $S \circ T : U \to W$
- $(S \circ T)^* : W^* \to U^*$
- $S^* : W^* \to V^*$ und $T^* : V^* \to U^*$
- $T^* \circ S^* : W^* \to U^*$

Wir zeigen die Gleichheit durch Anwendung auf ein beliebiges Element $\varphi \in W^*$: Dafür sei $\varphi \in W^*$ und $u \in U$ beliebig.

Für die linke Seite gilt:

$$\begin{aligned} ((S \circ T)^*(\varphi))(u) &= \varphi((S \circ T)(u)) \\ &= \varphi(S(T(u))) \end{aligned}$$

Für die rechte Seite gilt:

$$\begin{aligned} (T^* \circ S^*)(\varphi)(u) &= T^*(S^*(\varphi))(u) \\ &= (S^*(\varphi))(T(u)) \\ &= \varphi(S(T(u))) \end{aligned}$$

Da die Ausdrücke für beliebige $\varphi \in W^*$ und $u \in U$ übereinstimmen, gilt:

$$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$$

3. Sei U ein beliebiger Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass es ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbestimmten gibt, dessen Lösungsmenge genau U ist.

Solution: Vorgehen: Wir konstruieren eine lineare Abbildung F, die genau U als Kern hat. Die zugehörige Abbildungsmatrix A liefert dann über $Ax = 0$ ein Gleichungssystem in n Gleichungen und n Unbekannten, das genau U als Lösung hat.

Da U ein Unterraum ist, gibt es eine Basis $u_1, \ldots, u_m$ von U mit $m \leqslant n$. Diese lässt sich zu einer Basis $u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$ von $\mathbb{R}^n$ ergänzen. Nun können wir die lineare Abbildung F mit Kern U wiefolgt definieren:
Wir definieren $F(u_i) = 0$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und $F(v_j) = v_j$ für $m+1 \leqslant j \leqslant n$. Da $u_1, \ldots, u_m,$
$v_{m+1}, \ldots, v_n$ eine Basis ist, ist F wohldefiniert und bei Konstruktion hat F genau U als Kern. Wie im Vorgehen weiter oben beschrieben, gibt es nun eine zu F zugehörige Matrix A, die die lineare Abbildung beschreibt. Es folgt, dass $Ax = 0$ ein Gleichungssystem mit den gewünschten Eigenschaften darstellt.

4. (a) Sei V' ein Unterraum eines K-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass jede Linearform auf V' eine Fortsetzung zu einer Linearform auf V besitzt.

   (b) Sei $V = V_1 \oplus V_2$. Konstruieren Sie einen Isomorphismus

$$V^* \cong V_1^* \oplus V_2^*$$

   und beweisen Sie somit die Existenz eines solchen.

Solution:

(a) Sei $\alpha : V' \to K$ eine beliebige Linearform. Zu dem Unteraum V' wählen wir ein Komplement V'' in V und definieren die Abbildung $\widetilde{\alpha} : V \to K$ durch

$$\widetilde{\alpha}(v) := \alpha(v')$$

für jedes $v = v' + v''$ mit $v' \in V'$ und $v'' \in V''$. Wegen $V = V' \oplus V''$, ist $\widetilde{\alpha}$ wohldefiniert. Man zeigt nun direkt, dass α auch linear ist, also $\widetilde{\alpha} \in V^*$ gilt. Wegen $\widetilde{\alpha}_{|V'} = \alpha$ ist die Behauptung bewiesen.

(b) Definiere die Abbildung

$$\varphi : V_1^* \oplus V_2^* \to V^*$$

wie folgt: Für ein beliebiges Element $(\alpha_1, \alpha_2) \in V_1^* \oplus V_2^*$ sei

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) : V \to K$$

diejenige Abbildung, für die

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2)(v) = \alpha_1(v_1) + \alpha_2(v_2)$$

für alle $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ gilt. Man zeigt direkt, dass $\varphi(\alpha_1, \alpha_2)$ linear ist; die Abbildung φ ist also wohldefiniert. Weiters kann man leicht zeigen, dass auch φ selbst eine lineare Abbildung ist.

Wir konstruieren nun die zu φ inverse Abbildung. Definiere die Abbildung

$$\psi : V^* \to V_1^* \oplus V_2^*$$

durch

$$\psi(\alpha) = \big(\alpha_{|V_1}, \alpha_{|V_2}\big)$$

für alle $(\alpha : V \to K) \in V^*$. Man zeigt, dass die Abbildung ψ wohldefiniert und linear ist.

Behauptung: $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{V^*}$ und $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{V_1^* \oplus V_2^*}$.

Beweis. Sei $\alpha \in V^*$ und $v = v_1 + v_2 \in V$ wobei $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$, dann folgt wegen

$$\varphi \circ \psi(\alpha)(v) = (\psi(\alpha))_1(v_1) + (\psi(\alpha))_2(v_2) = \alpha_{|V_1}(v_1) + \alpha_{|V_2}(v_2) = \alpha(v_1 + v_2) = \alpha(v)$$

die Aussage $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{V^*}$.
Weiters seien $\alpha_i \in V_i^*$ und $\iota_i \colon V_i \to V$ die Inklusion für $i = 1, 2$. Dann ist

$$\psi(\varphi(\alpha_1, \alpha_2))(v_1, v_2) = (\varphi(\alpha_1, \alpha_2)_{|V_1}(\iota_i(v_1)), \varphi(\alpha_1, \alpha_2)_{|V_2}(\iota_i(v_2))) = (\alpha_1(v_1), \alpha_2(v_2))$$

und somit folgt $\psi(\varphi(\alpha_1, \alpha_2)) = (\alpha_1, \alpha_2)$, also $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{V_1^* \oplus V_2^*}$. $\square$

5. Finden Sie die Annulatoren der folgenden Unterräume

   (a) $U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \leqslant \mathbb{R}^2$

   (b) $U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leqslant \mathbb{R}^3$

   (c) $U_3 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \leqslant \mathbb{R}^3$

   (d) $U_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \leqslant \mathbb{R}^4$

   Solution:

(a) Wir stellen fest, dass $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist. Dementsprechend ist $U_1 = \mathbb{R}^2$ und somit ist $U_1^\circ = \{0\} \leqslant (\mathbb{R}^2)^*$, also nur die Nullabbildung.

(b) Der Unterraum U_2 hat Dimension 2. Also folgt, dass U_2^* die Dimension 1 hat. Wir suchen also ein Element $\ell \in (\mathbb{R}^3)^*$, sodass

$$\ell(e_1 - 2e_2 + e_3) = 0, \quad \ell(-2e_1 + e_2 + e_3) = 0$$

gilt. Schreiben wir $\ell = ae_1^* + be_2^* + ce_3^*$ in der dualen Basis der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$, so folgen die beiden Gleichungen

$$2b = a + c, \quad 2a = b + c.$$

Diese Gleichungen sind nur für $a = b = c$ erfüllt. Daher gilt

$$U_2^\circ = \langle e_1^* + e_2^* + e_3^* \rangle.$$

(c) Analog wie in (b) argumentieren wir, dass U_3° die Dimension 2 hat. Es reicht also zwei linear unabhängige Elemente ℓ_1 und ℓ_2 in U_3° zu finden. Wir wählen $\ell_1 = e_3^*$, sowie $\ell_2 = 3e_1^* + 2e_2^*$. Diese Elemente sind offensichtlich linear unabhängig und es gilt

$$\begin{aligned} &\ell_1(-2e_1 + 3e_2) = e_3^*(-2e_1 + 3e_2) = 0, \\ &\ell_2(-2e_1 + 3e_2) = (3e_1^* + 2e_2^*)(-2e_1 + 3e_2) = 3e_1^*(-2e_1 + 3e_2) + 2e_2^*(-2e_1 + 3e_2) = -6 + 6 = \end{aligned}$$

Daher ist $U_3^\circ = \langle \ell_1, \ell_2 \rangle$.

(d) Es gilt $\ell = ae_1^* + be2^* + ce_3^* + de_4^* \in U_4^\circ$ dann und nur dann wenn

$$0 = \ell(e_1 + e_2) = a + b$$

und

$$0 = \ell(e_2 + e_3 - e_4) = b + c - d$$

gilt. Daher ist

$$U_4^\circ = \{-be_1^* + be2^* + ce_3^* + (b + c)e_4^* \mid b, c \in \mathbb{R}\} = \langle -e_1^* + e_2^* + e_4^*, e_3^* + e_4^* \rangle.$$

6. Sei A die folgende (3×3)-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Annulator von $(\operatorname{im}(T_A^*))$.

Solution: Nach Satz 6.4.6 ist $(\operatorname{im} T_A^*)^\circ = \ker(T_A^{**})$ und nach Satz 6.3.9 ist die Darstellungsmatrix von T_A^{**} bezüglich der Standardbasis $(A^t)^t = A$. Der Kern von A ist erzeugt von den Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

7. Bestimmen Sie die Ränge der folgenden $(n \times n)$-Matrizen in Abhängigkeit der positiven ganzen Zahl n.

   (a) $(k\ell)_{k,\ell=1,\dots,n}$

   (b) $\left((-1)^{k+\ell}(k+\ell-1)\right)_{k,\ell=1,\dots,n}$

   (c) $\left(\dfrac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!}\right)_{k,\ell=0,\dots,n-1}$

   Solution:

   (a) Wir setzen $B := (b_{kl})_{k,l=1,\dots,n} := (kl)_{k,l=1,\dots,n}$. Sei $B' = (b'_{kl})_{k,l=1,\dots,n}$ die Matrix, die aus B entsteht, indem man für jedes $k = 2,\dots,n$ das k-fache der ersten Zeile von der k-ten Zeile subtrahiert. Dann gilt

$$b'_{kl} = \begin{cases} b_{kl} = l & \text{falls } k = 1 \\ b_{kl} - kb_{1l} = kl - kl = 0 & \text{falls } k > 1\,. \end{cases}$$

   Daher hat die Matrix B' genau eine nicht verschwindende Zeile und somit Rang 1. Da B' durch elementare Zeilenoperationen aus B entstanden ist, also durch Linksmultiplikation mit einer invertierbaren Matrix, hat B' denselben Rang wie B. Also folgt $\mathrm{rk}(B) = 1$.

   Alternative Überlegung: Sei $u := (1,\dots,n)$ die $1 \times n$ Matrix mit Eintrag i an der Position $(1,i)$. Dann gilt $B = u^T \cdot u$. Da $\mathrm{rk}(u) \leqslant 1$ ist, folgt aus einem früheren Aufgabe, dass auch $\mathrm{rk}(B) \leqslant 1$ ist. Wegen $B \neq 0$ gilt zudem $\mathrm{rk}(B) \geqslant 1$ und daher $\mathrm{rk}(B) = 1$.

   (b) Sei $B := (b_{kl})_{k,l=1,\dots,n}$ mit $b_{kl} := (-1)^{k+l}(k+l-1)$. Für $n = 1$ ist $B = (1) \neq 0$ und hat somit Rang 1, wir können also $n \geqslant 2$ annehmen. Für alle $k = 1,\dots,n-2$ und $\ell = 1,\dots,n$ gilt

$$b_{kl} + 2b_{k+1,l} + b_{k+2,l} = 0,$$

   also ist die k-te Zeile von B eine Linearkombination der $(k+1)$-ten und der $(k+2)$-ten Zeile. Man kann B daher durch Zeilenoperationen zu einer Matrix umformen, in der alle Einträge aller Zeilen, bis auf die letzten beiden, verschwinden und die letzten beiden Zeilen mit denen von B übereinstimmen. Man prüft dann direkt, dass diese beiden Zeilen linear unabhängig sind. Es folgt

$$\mathrm{Rang}\,B = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1 \\ 2 & \text{falls } n \geqslant 2. \end{cases}$$

   (c) Sei $C_n := (c_{kl})_{k,l=0,\dots,n-1}$ die Matrix mit $c_{kl} := \frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!} = \binom{k+l}{l}$.

   Behauptung: $\mathrm{rk}(C_n) = n$. Wir benutzen Induktion über n. Im Fall $n = 1$ stimmt die Behauptung, da $C_1 = (1) \neq 0$ ist. Angenommen, die Aussage gilt für ein $n \geqslant 1$. Sei $C' = (c'_{kl})_{k,l=0,\dots,n}$ die Matrix, welche aus C_{n+1} entsteht, indem man beginnend mit der letzten Zeile jeweils die vorhergehende Zeile subtrahiert. In Formeln:

$$c'_{kl} := \begin{cases} c_{kl} - c_{k-1,l} & \text{falls } k = 1, \dots, n \\ c_{0l} & \text{falls } k = 0\,. \end{cases}$$

Sei weiter $C'' = (c''_{kl})_{k,l=0,\dots,n}$ diejenige Matrix, welche aus C' entsteht, indem man beginned mit der letzten Spalte jeweils die vorhergehende Spalte subtrahiert. In Formeln:

$$c''_{kl} := \begin{cases} c'_{kl} - c'_{k,l-1} & l = 1, \dots, n \\ c'_{k0} & l = 0\,. \end{cases}$$

Für alle $1 \leqslant k, l \leqslant n$ gilt dann

$$\begin{aligned} c''_{kl} &= c'_{kl} - c'_{k,l-1} \\ &= (c_{kl} - c_{k-1,l}) - (c_{k,l-1} - c_{k-1,l-1}) \\ &= \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} - \frac{(k+\ell-1)!}{(k-1)!\ell!} - \frac{(k+\ell-1)!}{k!(\ell-1)!} + \frac{(k+\ell-2)!}{(k-1)!(\ell-1)!} \\ &= \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!}\left(1 - \frac{k}{k+1} - \frac{l}{k+l}\right) + \frac{(k+\ell-2)!}{(k-1)!(\ell-1)!} \\ &= \frac{(k+\ell-2)!}{(k-1)!(\ell-1)!}\,. \end{aligned}$$

Daher ist

$$C'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_n & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

und es folgt

$$\operatorname{rk}(C_{n+1}) = \operatorname{rk}(C'') = 1 + \operatorname{rk}(C_n) = n + 1.$$