Lösungen 11

1. Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V und $B' = (w_1, \ldots, w_m)$ eine geordnete Basis von W. Sei $B'^* = (w_1^*, \ldots, w_m^*)$ die zu B' duale Basis von W^*. Zeigen Sie, dass für jede lineare Abbildung $f\colon V \to W$ gilt

$$([f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'})_{ij} = w_i^*(f(v_j)) \quad \text{für alle } 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Solution: Die Darstellungsmatrix $A := (a_{lk})_{lk} := [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ von f bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ ist definiert durch

$$f(v_j) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} w_k$$

für alle $1 \leqslant i \leqslant m$.
Damit gilt für jedes $1 \leqslant i \leqslant m$ und $1 \leqslant j \leqslant n$, dass

$$w_i^*(f(v_j)) = w_i^*(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} w_k) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} w_i^*(w_k) = a_{ij} = ([f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'})_{ij},$$

was genau zu zeigen war.

2. Sei $n \geqslant 1$. Dann definieren wir das *kanonische Skalarprodukt* auf $\mathbb{R}^n$ als

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

(a) Sei $u \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\ell_u \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ v \mapsto \langle u, v \rangle$ eine lineare Abbildung ist.

(b) Es sei $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\{\ell_{b_1}, \ldots, \ell_{b_n}\}$ eine Basis des Dualraums $(\mathbb{R}^n)^*$ ist.

(c) Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ ist *orthogonal* zu $u \in \mathbb{R}^n$, falls $v \in \ker(\ell_u)$ gilt. Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus

$$\langle u \rangle^\circ \cong \ker(\ell_u)$$

gibt. Das heisst, der Annulator von $\langle u \rangle$ ist Isomorph zum Untervektorraum aller Vektoren, die orthogonal zu u sind.

(d) Folgern Sie, dass für einen Unterraum $U \leqslant \mathbb{R}^n$ gilt

$$U^\circ \cong \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \in \ker(\ell_u),\ \forall u \in U\}.$$

(e) Bestimmen Sie diejenigen Unterräume von $\mathbb{R}^3$, zu denen die Annulatoren

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

nach (d) isomorph sind.

Solution:

(a) Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \ell_u(v + \lambda w) &= \langle (x_1, \ldots, x_n), (v_1 + \lambda w_1, \ldots, v_n + \lambda w_n) \rangle = u_1(v_1 + \lambda w_1) + \cdots + u_n(v_n + \lambda w_n) \\ &= u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n + \lambda u_1 w_1 + \cdots + \lambda u_n w_n = \ell_u(v) + \lambda \ell_u(w), \end{aligned}$$

und somit ist ℓ_u für alle $u \in \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung.

(b) Wir wissen, dass der Dualraum $(\mathbb{R}^n)^*$ auch die Dimension n hat. Somit reicht es zu zeigen, dass $\ell_{b_1}, \ldots, \ell_{b_n}$ linear unabhängig sind. Seien also $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gewählt, sodass

$$\lambda_1 \ell_{b_1} + \cdots + \lambda_n \ell_{b_n} = 0.$$

Das heisst, für alle $b \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$(\lambda_1 \ell_{b_1} + \cdots + \lambda_n \ell_{b_n})(b) = 0.$$

Insbesondere ist das für die Standardbasisvektoren $e_1, \ldots, e_n$ der Fall. Wir erhalten also

$$0 = (\lambda_1 \ell_{b_1} + \cdots + \lambda_n \ell_{b_n})(e_i) = \lambda_1 a_{i1} + \lambda_2 a_{i2} + \cdots + \lambda_n a_{in}, \tag{1}$$

für alle $1 \leqslant i \leqslant n$, wobei a_{ij} die Koeffizienten von b_j bezüglich der Standardbasis sind, also $b_j = a_{1j} e_1 + \cdots + a_{nj} e_n$.
Schreiben wir die Gleichungen in (1) in ein Gleichhungssystem ergibt das für die Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$

$$A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Da die Basiswechselmatrix $A = [id_{\mathbb{R}^n}]^{(b_1, \ldots, b_n)}_{(e_1, \ldots, e_n)}$ jedoch invertierbar ist, folgt

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Also ist $(\ell_{b_1}, \ldots, \ell_{b_n})$ linear unabhängig und somit eine Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$.

(c) Zuerst überprüfen wir den Fall $u = 0$. Dann gilt $\langle 0\rangle^\circ = (\mathbb{R}^n)^*$ sowie $\ker(\ell_0) = \mathbb{R}^n$. Für eine Belibiege Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von $\mathbb{R}^n$ wissen wir durch die vorherige Teilaufgabe, dass die Abbildung

$$b_i \to \ell_{b_i}$$

einen Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}^n$ und dessen Dualraum $(\mathbb{R}^n)^*$ beschreibt.
Sei nun $u \neq 0$. Wie zuvor definieren wir die Abbildung $\varphi\colon \ker(\ell_u) \to \langle u\rangle^\circ, \varphi(v) = \ell_v$. Dann gilt

$$\varphi(v)(u) = \ell_v(u) = \langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle = \ell_u(v) = 0,$$

also ist φ auch wirklich wohldefiniert. Hier gilt die dritte Gleichung aufgrund der Tatsache, dass das Skalarprodukt per Definition symmetrisch ist, und die letzte Gleichung da v in $\ker(\ell_u)$ liegt.
Es lässt sich ausserdem leicht zeigen, dass φ eine lineare Abbildung ist. Des Weiteren ist die Dimension von $\langle u\rangle$ gleich $(n-1)$. Doch auch die Dimension von $\ker(\ell_u)$ ist $(n-1)$, denn

$$\dim(\ker(\ell_i)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\mathrm{im}(\ell_i)) = n - 1.$$

Es gilt $\ell_u(u) = u_1^2 + \ldots u_n^2 \neq 0$, da u laut Annahme nicht der Nullvektor ist, also hat das Bild von ℓ_u auch tatsächlich die Dimension 1.
Zusammenfassend erhalten wir, dass φ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen derselben Dimension ist. Also ist φ genau dann ein Isomorphismus, wenn φ injektiv ist.
Sei $v \neq 0$ in $\ker(\ell_u)$, dann folgt

$$\varphi(v)(v) = \ell_v(v) = v_1^2 + \ldots v_n^2 \neq 0,$$

somit kann $\varphi(v)$ nicht die Nullabbildung in $(\mathbb{R}^n)^*$ sein, also ist φ ist injektiv und somit ein Isomorphismus.

(d) Sei $(u_1, \ldots, u_m)$ eine Basis von U. Dann ist $\ell \in U^\circ$ dann und nur dann, wenn $\ell(u_i) = 0$, also $\ell \in \langle u_i\rangle^\circ$, für alle $1 \leqslant i \leqslant m$ gilt. Das heisst

$$\ell \in U^\circ \Leftrightarrow \ell \in \bigcap_{i=1}^m \langle u_i\rangle^\circ.$$

Nach der vorherigen Teilaufgabe erhalten wir

$$\bigcap_{i=1}^m \langle u_i\rangle^\circ \cong \bigcap_{i=1}^m \ker(\ell_{u_i})$$

in dem wir den Isomorphismus

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*,$$
$$v \mapsto \ell_v$$

auf den Unterraum $\bigcap_{i=1}^{m} \ker(\ell_{u_i})$ einschränken. Jedoch ist

$$\bigcap_{i=1}^{m} \ker(\ell_{u_i}) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \ell_{u_i}(v) = 0, \, \forall 1 \leqslant i \leqslant m\} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \in \ker(\ell_u), \, \forall u \in U\}$$

aufgrund der Linearität von φ. Das heisst

$$U^\circ \cong \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \in \ker(\ell_u), \; \forall u \in U\}.$$

(e) Aus Dimensionsgründen und den vorherigen Teilen der Aufgabe wissen wir, dass es reicht zwei Vektoren v_1 und v_2 zu finden, die orthogonal zu den Basisvektoren von U_1 beziehungsweise U_2 sind.
Als v_1 wählen wir

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

dann gilt $\langle v_1 \rangle \cong U_1^\circ$.
Als v_2 wählen wir

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dann gilt $\langle v_2 \rangle \cong U_2^\circ$.

3. Es sei V der Vektorraum der reellen Polynome von Grad kleiner gleich 3.

(a) Finden Sie alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für die die Evaluationsabbildung $\mathrm{ev}_x \colon V \to \mathbb{R}$, $p \mapsto p(x)$ ein Element von V^* beschreibt.

(b) Für $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ definieren wir die Abbildungen $f_i : V \to \mathbb{R}$ durch $f_i(p) = \int_0^1 p^{(i)}(t)\, dt$ für alle Polynome $p \in V$ und wobei $p^{(i)}$ die i-te Ableitung des Polynomes p ist. Zeigen Sie, dass (f_0, f_1, f_2, f_3) eine Basis des Dualraumes V^* von V ist.

(c) Drücken Sie die Elemente der zur Standardbasis $(1, t, t^2, t^3)$ dualen Basis des Dualraumes V^* als Linearkombination der Elemente der Basis (f_0, f_1, f_2, f_3) aus.

Solution:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Seien p_1, p_2 zwei Polynome vom Grad kleiner gleich 3 und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\mathrm{ev}_x(p_1 + p_2) = (p_1 + p_2)(x) = \mathrm{ev}_x(p_1) + \mathrm{ev}_x(p_2), \mathrm{ev}_x(\lambda p_1) = (\lambda p_1)(x) = \lambda p_1(x) = \lambda \, \mathrm{ev}_x(p_1)$$

und somit ist ev_x eine lineare Abbildung für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$.
Das lässt einen vielleicht glauben, dass V^* unendlich-dimensional wäre, jedoch lässt sich Leicht berechnen, dass

$$\mathrm{ev}_{-2} - 4\,\mathrm{ev}_{-1} + 6\,\mathrm{ev}_0 - 4\,\mathrm{ev}_1 + \mathrm{ev}_2 = 0$$

gilt. Mit anderen Worten, gilt für jedes Polynom p vom Grad kleiner gleich 3, die Gleichung

$$p(-2) - 4p(-1) + 6p(0) - 4p(1) + p(2) = 0.$$

(b) Die Abbildungen f_0, f_1, f_2, f_3 sind Linearformen auf V, da sowohl Ableitung, als auch Intgeration linearformen sind. Sei $\mathcal{B}^* = (\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3)$ die zu $(1, t, t^2, t^3)$ duale Basis von V^*. In der Basis $\mathcal{B}^*$ ausgedrückt, haben wir

$$(f_0)_{B^*} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad (f_1)_{B^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (f_2)_{B^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (f_3)_{B^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Diese 4 Vektoren sind linear unabhängig, also ist (f_0, f_1, f_2, f_3) tatsächlich eine Basis von V^*.

(c) Um die duale Basis $\mathcal{B}^* = (\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3)$ der Standardbasis $\mathcal{B} = (1, t, t^2, t^3)$ als Linearkombination der Elemente der Basis $\mathcal{F} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ zu schreiben müssen wir nichts anderes tun, als die inverse der Matrix

$$[id]^{\mathcal{F}^*}_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen.
Eine leichte Rechnung zeigt

$$[id]^{\mathcal{B}^*}_{\mathcal{F}^*} = ([id]^{\mathcal{F}^*}_{\mathcal{B}^*})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Somit folgt

$$\ell_0 = f_0 - \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{12} f_2 \qquad \ell_1 = f_1 - \frac{1}{2} f_2 + \frac{1}{12} f_3$$
$$\ell_2 = \frac{1}{2} f_2 - \frac{1}{4} f_3 \qquad \ell_3 = \frac{1}{6} f_3.$$

4. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $T : V \to V$ die lineare Abbildung, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis gegeben ist.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der dualen Abbildung $T^* : V^* \to V^*$ bezüglich der dualen Basis der Standardbasis.

(b) Berechnen Sie $\ker(T^*)$.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{im}(T^*)$ und überprüfen Sie, dass

$$\dim(\ker(T^*)) + \dim(\mathrm{im}(T^*)) = \dim(V).$$

Solution:

(a) Die Darstellungsmatrix von T^* bezüglich der dualen Basis der Standardbasis ist $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(b) Die Matrix A^t hat vollen Rang, also ist $\ker(T^*) = \{0_{V^*}\}$ und $\mathrm{im}(T^*) = V^*$.

(c) Es gilt $\dim(V^*) + \dim(\{0_{V^*}\}) = 3 + 0 = \dim(V)$.