D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2024

Prof. Sarah Zerbes

Serie 12

1. Es sei V ein K-Vektorraum und $U \leqslant V$ ein Untervektorraum. Erinnern Sie sich an die Konstruktion der Abbildung $\alpha\colon (V/U)^* \to U^\circ$, $\alpha(\ell) = \ell \circ q_U$ aus der Vorlesung. Als Diagramm ist diese Abbildung beschrieben durch:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "q_U"'] \arrow[dr, dashed, "\alpha(\ell)"] & \\ V/U \arrow[r, "\ell"'] & K. \end{tikzcd}$$

   (a) Zeigen Sie, dass α eine lineare Abbildung ist.

   (b) Zeigen Sie, dass α injektiv und surjektiv ist.

   (c) Beschreiben Sie die Inverse Abbildung $\alpha^{-1}\colon U^\circ \to (V/U)^*$.

   Die Abbildung α ist ein *kanonischer* Isomorphismus.

2. (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$, gegeben durch

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

   linear ist.

   (b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von T.

   (c) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von T.

   (d) Seien $\mathcal{B} = (e_1 + e_3, e_1 + e_2, e_2 + e_3)$ und $\mathcal{C} = (e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_3, e_4 + e_5, e_4 - e_5)$. Bestimmen Sie $[T^*]^{\mathcal{C}^*}_{\mathcal{B}^*}$.

3. (a) Betrachten Sie den Unterraum U_1 von $\mathbb{R}^4$, gegeben als

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

   Finden Sie ein Komplement W_1 zu U_1, das heisst einen Unterraum $W_1 \leqslant \mathbb{R}^4$, sodass $U_1 + W_1 = \mathbb{R}^4$ und $U_1 \cap W_1 = \{0\}$.

(b) Betrachten Sie den Unterraum U_2 von $\mathbb{R}^4$, gegeben als

$$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid 9x_1+2x_2+x_3-3x_4 = 0,\ 8x_1-6x_2+2x_3+4x_4 = 0\}$$

Finden Sie nun ein Komplement W_2 zu U_2.

4. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, sei W ein Unterraum von V. Finden Sie einen kanonischen Isomorphismus

$$(V^*/W^\circ)^* \cong W.$$

5. Es sei $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Diese Aufgabe soll Ihnen zeigen, dass die im ersten Isomorphismussatz konstruierte Abbildung $\overline{T}$ “alle wichtigen Informationen der Abbildung T enthält”.
Angenommen, Sie erweitern die Abbildung T zu einer Abbildung $S\colon \mathbb{R}^{20} \to \mathbb{R}^{40}$ in dem Sie S durch

$$S(x_1, \ldots, x_{20}) := (T(x_1, x_2), 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^{40}$$

definieren, also indem Sie $T(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ als die ersten drei Koordinaten in $\mathbb{R}^{40}$ auffassen.

(a) Zeigen Sie, unter Anwendung des ersten, zweiten und dritten Isomorphiesatzes, dass die Abbildungen $\overline{T}$ und $\overline{S}$ *konjugiert* zueinander sind. Das heisst, finden Sie Isomorphismen φ und ψ, sodass

$$\overline{T} = \psi \circ \overline{S} \circ \varphi.$$

Finden Sie also unter anderem den Definitions- und Bildbereich der Isomorphismen φ und ψ.

(b) Erklären Sie, warum sich die Abbildungen $\overline{T}$ und $\overline{S}$ also faktisch nicht von einander unterscheiden lassen.
Tipp: Überprüfen Sie die Abbildungsmatrizen der beiden Abbildungen.

(c) Berechnen Sie $\overline{T}$ für die Abbildung

$$T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \end{pmatrix}.$$