

## Lösungen 12

1. Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U \leq V$  ein Untervektorraum. Erinnern Sie sich an die Konstruktion der Abbildung  $\alpha: (V/U)^* \rightarrow U^\circ$ ,  $\alpha(\ell) = \ell \circ q_U$  aus der Vorlesung. Als Diagramm ist diese Abbildung beschrieben durch:

$$\begin{array}{ccc} V & & \\ q_U \downarrow & \searrow \alpha(\ell) & \\ V/U & \xrightarrow{\ell} & K. \end{array}$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $\alpha$  eine lineare Abbildung ist.  
(b) Zeigen Sie, dass  $\alpha$  injektiv und surjektiv ist.  
(c) Beschreiben Sie die Inverse Abbildung  $\alpha^{-1}: U^\circ \rightarrow (V/U)^*$ .

Die Abbildung  $\alpha$  ist ein *kanonischer* Isomorphismus.

**Solution:**

- (a) Seien  $\ell_1, \ell_2 \in: (V/U)^*$  und  $\lambda \in K$ . Dann ist

$$\alpha(\ell_1 + \lambda\ell_2) = (\ell_1 + \lambda\ell_2) \circ q_U = \ell_1 q_U + \lambda\ell_2 q_U = \alpha(\ell_1) + \lambda\alpha(\ell_2),$$

also ist  $\alpha$  linear.

- (b) Zuerst zeigen wir Injektivität: Angenommen  $\ell \in: (V/U)^*$  ist nicht die Nullabbildung. Dann gibt es ein  $x \in V/U$  sodass  $\ell(x) \neq 0$ . Wir wählen einen Repräsentanten  $v \in V$  von  $x$ . Dann folgt

$$\alpha(\ell)(v) = \ell \circ q_U(v) = \ell(x) \neq 0.$$

Folglich ist  $\alpha(\ell)$  nicht die Nullabbildung und somit ist  $\alpha$  injektiv.

Nun zur Surjektivität von  $\alpha$ : Sei  $\ell' \in U^\circ$  gegeben. Wir wissen, dass  $U \subseteq \ker(\ell')$ . Somit gilt für alle  $v \in V$  und  $u \in U$ , dass

$$\ell'(v) = \ell'(v) + \ell'(u) = \ell'(v + u).$$

Also nimmt  $\ell'$  auf der gesamten Äquivalenzklasse  $v + U$  von  $v$  denselben Wert an. Wir definieren  $\ell \in (V/U)^*$  als

$$\ell(x) := \ell'(v)$$

für alle  $x \in V/U$ , wobei  $v \in V$  ein Repräsentant von  $x$  ist. Da  $\ell'$  auf der gesamten Äquivalenzklasse  $v + U$  denselben Wert annimmt, ist  $\ell$  wohldefiniert. Es sei nun  $v \in V$  und  $x = v + U$  die Äquivalenzklasse von  $v$ , dann folgt

$$\alpha(\ell)(v) = \ell \circ q_U(v) = \ell(x) = \ell'(v).$$

Also gilt  $\alpha(\ell) = \ell'$  und  $\alpha$  ist surjektiv.

- (c) Die inverse Abbildung  $\alpha^{-1}: U^\circ \rightarrow (V/U)^*$  haben wir schon im vorherigen Punkt konstruiert. Es gilt

$$\alpha^{-1}(\ell')(x) := \ell'(v),$$

für alle  $\ell' \in U^\circ$ , und alle  $x \in V/U$ , wobei  $v$  ein Repräsentant von  $x$  ist. Die Linearität dieser Abbildung lässt sich leicht zeigen. Der springende Punkt ist, dass diese Abbildung wohldefiniert ist und der Wert von  $\ell'$  nicht von der Wahl des Repräsentanten  $v$  abhängt, da  $U \subseteq \ker(\ell')$  gilt.

2. (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ , gegeben durch

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

linear ist.

- (b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von  $T$ .  
 (c) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von  $T$ .  
 (d) Seien  $\mathcal{B} = (e_1 + e_3, e_1 + e_2, e_2 + e_3)$  und  $\mathcal{C} = (e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_3, e_4 + e_5, e_4 - e_5)$ . Bestimmen Sie  $[T^*]_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}^*}$ .

**Solution:**

- (a) Setze

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in M_{5 \times 3}(\mathbb{R})$$

und sei  $x^T = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$  beliebig, dann ist  $T(x) = L_A(x)$ . Da  $x$  beliebig war ist  $T$  linear.

- (b) Wir erinnern uns, dass für invertierbare Matrizen  $F$  gilt  $\ker(L_A) = \ker(L_{FA})$  und wenden also elementare Zeilenumformungen auf  $A$  an:

$$A \begin{array}{l} \xrightarrow{Z_2 - 2Z_1} \\ \xrightarrow{Z_3 - 2Z_1} \\ \xrightarrow{Z_4 + Z_1} \\ \xrightarrow{Z_5 - 3Z_1} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{Z_1 - Z_3} \\ \xrightarrow{Z_4 - 2Z_3} \\ \xrightarrow{Z_5 + 2Z_3} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da der Rang unter elementaren Zeilenumformungen invariant ist, sehen wir, dass

$\text{Rang}(A) = 2$  gilt und folglich

$$\dim(\ker(T)) = \dim \mathbb{R}^3 - \text{Rang}(T) = 3 - \text{Rang}(L_A) = 3 - \text{Rang}(A) = 1$$

Jeder Vektor  $(x_1, x_2, x_3)^T$  im Kern erfüllt gemäss der ersten Zeile der reduzierten Matrix  $x_1 + x_3 = 0$  und gemäss der dritten Zeile  $x_2 + 2x_3 = 0$ . Dies trifft beispielsweise auf den Vektor  $v := (1, 2, -1)^T$  zu und folglich ist  $\{v = (1, 2, -1)^T\}$  eine Basis von  $\ker(T)$ . Wir überprüfen – dies ist eigentlich bereits bewiesen, wir kontrollieren also nur auf Rechenfehler – zur Sicherheit noch, ob  $v$  tatsächlich in  $\ker(T)$  liegt:

$$T(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Da  $\text{Rang}(A) = 2$  und da  $\text{Im}(T)$  das Erzeugnis der Spalten von  $A$  ist, reicht es, zwei linear unabhängige Spalten von  $A$  zu finden. Man beachte, dass eine Menge  $\{u, v\}$  genau dann linear abhängig ist, wenn  $u = \lambda v$  für ein  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Folglich ist  $\{A^{(1)}, A^{(2)}\}$  eine Basis von  $\text{Im}(T)$ .

(d) Wir wissen, dass

$$[T^*]_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*} = ([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})^t = ([I_{\mathbb{R}^5}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_5} [T]_{\mathcal{E}_5}^{\mathcal{E}_3} [I_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}})^t = ([I_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}})^t A^t ([I_{\mathbb{R}^5}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_5})^t$$

Die Basiswechselmatrizen von einer Basis zur Standardbasis sind die Matrizen mit den entsprechenden Basisvektoren als Spalten. Entsprechend ist

$$\begin{aligned} [I_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ [I_{\mathbb{R}^5}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_5} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow [I_{\mathbb{R}^5}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_5} &= ([I_{\mathbb{R}^5}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_5})^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
 [T^*]_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 6 & -2 & 10 & 4 & -4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 11 & 4 & -2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

3. (a) Betrachten Sie den Unterraum  $U_1$  von  $\mathbb{R}^4$ , gegeben als

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Finden Sie ein Komplement  $W_1$  zu  $U_1$ , das heisst einen Unterraum  $W_1 \leq \mathbb{R}^4$ , sodass  $U_1 + W_1 = \mathbb{R}^4$  und  $U_1 \cap W_1 = \{0\}$ .

- (b) Betrachten Sie den Unterraum  $U_2$  von  $\mathbb{R}^4$ , gegeben als

$$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid 9x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, 8x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0\}$$

Finden Sie nun ein Komplement  $W_2$  zu  $U_2$ .

**Solution:**

- (a) Ein mögliches Komplement zu  $U_1$  ist gegeben durch

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

denn die beiden erzeugenden Vektoren sind linear unabhängig und nicht in  $U_1$  enthalten.

- (b) Ein mögliches Komplement zu  $U_2$  ist gegeben durch

$$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

denn die beiden erzeugenden Vektoren sind linear unabhängig und nicht in  $U_2$  enthalten, da sie die benötigten Gleichungen nicht erfüllen.

4. Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{K}$ , sei  $W$  ein Unterraum von  $V$ . Finden Sie einen kanonischen Isomorphismus

$$(V^*/W^\circ)^* \cong W.$$

**Solution:** Wir definieren  $\Psi : W \rightarrow (V^*/W^\circ)^*$  durch

$$\Psi(w)(f + W^\circ) := \text{ev}_w(f)$$

wobei  $\text{ev}_w : V^* \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $f \mapsto f(w)$  die Evaluationsabbildung in  $w$  ist. Wir zeigen, dass  $\Psi$  wohldefiniert ist. Seien  $f, f' \in V^*$  mit  $f + W^\circ = f' + W^\circ$ , dann ist  $f' = f + h$  mit  $h \in W^\circ$  und folglich

$$\text{ev}_w(f') = \text{ev}_w(f + h) = \text{ev}_w(f) + \underbrace{\text{ev}_w(h)}_{=h(w)=0} = \text{ev}_w(f)$$

Also ist  $\Psi$  wohldefiniert.

Es wurde in der Vorlesung gezeigt, dass die Abbildung  $w \mapsto \text{ev}_w$  linear ist. Folglich ist für  $w_1, w_2 \in W$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  sowie für  $f \in V^*$

$$\begin{aligned} \Psi(w_1 + \lambda w_2)(f + W^\circ) &= \text{ev}_{w_1 + \lambda w_2}(f) = \text{ev}_{w_1}(f) + \lambda \text{ev}_{w_2}(f) \\ &= \Psi(w_1)(f + W^\circ) + \lambda \Psi(w_2)(f + W^\circ) \\ &= (\Psi(w_1) + \lambda \Psi(w_2))(f + W^\circ) \end{aligned}$$

und somit ist  $\Psi$  linear.

Wir zeigen, dass  $\Psi$  injektiv ist. Seien  $w_1, w_2 \in W$  mit  $\Psi(w_1) = \Psi(w_2)$ , dann ist für beliebige  $f \in V^*$

$$f(w_1) = \text{ev}_{w_1}(f) = \Psi(w_1)(f + W^\circ) = \Psi(w_2)(f + W^\circ) = \text{ev}_{w_2}(f) = f(w_2)$$

Insbesondere ist  $\text{ev}_{w_1} = \text{ev}_{w_2}$ . Da die Abbildung  $V \rightarrow V^{**}$ ,  $v \mapsto \text{ev}_v$  ein Isomorphismus und insbesondere injektiv ist, folgt  $w_1 = w_2$ .

Um zu zeigen, dass  $\Psi$  ein Isomorphismus ist, reicht es wegen der Dimensionsformel und der bereits diskutierten Injektivität von  $\Psi$  zu zeigen, dass

$$\dim (V^*/W^\circ)^* = \dim W$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass  $U \cong U^*$  für alle endlichdimensionalen Vektorräume  $U$ . Somit folgt aus Aufgabe 1 in dieser Serie, dass  $\dim W^\circ = \dim V - \dim W$ , also gilt

$$\begin{aligned} \dim (V^*/W^\circ)^* &= \dim(V^*/W^\circ) = \dim V^* - \dim W^\circ \\ &= \dim V - (\dim V - \dim W) = \dim W \end{aligned}$$

wie gewünscht.

5. Es sei  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine lineare Abbildung. Diese Aufgabe soll Ihnen zeigen, dass die im ersten Isomorphismussatz konstruierte Abbildung  $\bar{T}$  "alle wichtigen Informationen der Abbildung  $T$  enthält".

Angenommen, Sie erweitern die Abbildung  $T$  zu einer Abbildung  $S: \mathbb{R}^{20} \rightarrow \mathbb{R}^{40}$  in dem Sie  $S$  durch

$$S(x_1, \dots, x_{20}) := (T(x_1, x_2), 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{40}$$

definieren, also indem Sie  $T(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$  als die ersten drei Koordinaten in  $\mathbb{R}^{40}$  auffassen.

- (a) Zeigen Sie, unter Anwendung des ersten, zweiten und dritten Isomorphiesatzes, dass die Abbildungen  $\bar{T}$  und  $\bar{S}$  *konjugiert* zueinander sind. Das heisst, finden Sie Isomorphismen  $\varphi$  und  $\psi$ , sodass

$$\bar{T} = \psi \circ \bar{S} \circ \varphi.$$

Finden Sie also unter anderem den Definitions- und Bildbereich der Isomorphismen  $\varphi$  und  $\psi$ .

- (b) Erklären Sie, warum sich die Abbildungen  $\bar{T}$  und  $\bar{S}$  also faktisch nicht von einander unterscheiden lassen.

*Tipp: Überprüfen Sie die Abbildungsmatrizen der beiden Abbildungen.*

- (c) Berechnen Sie  $\bar{T}$  für die Abbildung

$$T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \end{pmatrix}.$$

### Solution:

- (a) Die durch  $T$  induzierte Abbildung  $\bar{T}$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} \bar{T}: \mathbb{R}^2 / \ker(T) &\rightarrow \text{im}(T) \\ x &\mapsto T(v), \end{aligned}$$

wobei  $v \in \mathbb{R}^2$  ein Repräsentant von  $x$  ist.

Analogerweise ist die durch  $S$  induzierte Abbildung  $\bar{S}$  definiert durch

$$\begin{aligned} \bar{S}: \mathbb{R}^{20} / \ker(S) &\rightarrow \text{im}(S) \\ x &\mapsto S(v), \end{aligned}$$

wobei  $v \in \mathbb{R}^{20}$  ein Repräsentant von  $x$  ist.

Nun gilt aber  $\mathbb{R}^{20} = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^{18}$  sowie  $\ker(S) = \ker(T) \times \mathbb{R}^{18}$ , denn  $S$  bildet die

künstlich hinzugefügten 18 Koordinaten alle auf den Nullvektor ab. Ausserdem kann man sich leicht davon überzeugen, dass  $\text{im}(S) = \text{im}(T) \oplus \{(0, \dots, 0)\}$  gilt.

Definiere nun

$$\varphi : \mathbb{R}^2 / \ker(T) \rightarrow \mathbb{R}^{20} / \ker(S) \quad [x_1, x_2] \mapsto [(x_1, x_2, 0, \dots, 0)]$$

und

$$\psi : \text{im}(T) \times 0^{37} \rightarrow \text{im}(T) \quad (y_1, y_2, y_3, 0, \dots, 0) \mapsto (y_1, y_2, y_3)$$

Mit den vorherigen Feststellungen lässt sich zeigen, dass diese Abbildungen wohldefiniert und Isomorphismen sind. Ausserdem gilt

$$\bar{T} = \psi \circ \bar{S} \circ \varphi.$$

- (b) Wählen wir beliebige Basen  $\mathcal{B}$  von  $\mathbb{R}^2 / \ker(T)$  und  $\mathcal{C}$  von  $\text{im}(T)$ , so sind  $\varphi(\mathcal{B})$  und  $\psi^{-1}(\mathcal{C})$  Basen von  $\mathbb{R}^{20} / \ker(S)$  beziehungsweise  $\text{im}(S)$ . Weiters sind die beiden Abbildungsmatrizen  $[\bar{T}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  und  $[\bar{S}]_{\psi^{-1}(\mathcal{C})}^{\varphi(\mathcal{B})}$  identisch. Folglich kann man die Abbildungen  $\bar{T}$  und  $\bar{S}$  nicht voneinander unterscheiden, wenn man die entsprechenden Basen wählt.

- (c) Wir berechnen zunächst, dass  $\ker(T) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$ . Somit können wir

für jede Nebenklasse  $x + \ker(T)$  einen Repräsentanten finden, dessen ersten beiden Koordinaten verschwinden. Die induzierte Abbildung ist also gegeben durch

$$\bar{T}(x + \ker(T)) = T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \\ b \\ 2a - 3b \end{pmatrix}.$$