Serie 13

Hinweis: Sie dürfen für alle Übungen in dieser Serie annehmen, dass die n Determinantenfunktionen $D_n^{(i)}$ für $1 \leqslant i \leqslant n$, die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben, tatsächlich gleich sind. Diese Determinantenfunktion wird in dieser Serie als D_n bezeichnet und "die Determinante" genannt.

1. Für $i = 1, \ldots, n-1$ sei $\sigma_i \in S_n$ die Permutation, die i und $i+1$ vertauscht und alle übrigen Elemente von $\{1, \ldots, n\}$ festlässt, genannt *Nachbartransposition*.
   Zeigen Sie, dass jedes Element von S_n ein Produkt von Nachbartranspositionen ist.

2. Berechnen Sie die Determinante von
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

3. Seien α und β die zwei Permutationen in S_6
$$\alpha := (4, 5, 3, 1, 6, 2), \qquad \beta := (2, 6, 3, 5, 1, 4).$$
   (a) Berechnen Sie $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, α^{-1}, β^{-1}.
   (b) Schreiben Sie α als Produkt von Transpositionen in S_6.
   (c) Berechnen Sie $\operatorname{sgn}(\alpha)$ und $\operatorname{sgn}(\beta)$.

4. Sei $A_n \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ die Matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Beweisen Sie:
$$D_n(A_n) = n + 1\,.$$

5. (a) Zeigen Sie, dass die Zeilen einer Matrix $A \in M_{2\times 2}(K)$ genau dann linear unabhängig sind, wenn $\det(A) \neq 0$.
   Folgern Sie daraus, dass $A \in M_{2\times 2}(K)$ genau dann invertierbar ist, wenn $\det(A) \neq 0$.

(b) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen und bestimmen Sie, welche Matrizen invertierbar sind:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$
$$C = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 5-2i & 6+4i \\ -3+i & 7i \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$$
$$E = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{F}_7) \text{ und } F = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{F}_7)$$

6. Seien a und b Elemente eines Körpers K und A die $(n \times n)$-Matrix

$$\begin{pmatrix} b & a & \dots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & b \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass $D_n(A) = (b-a)^{n-1}\big(b + (n-1)a\big)$.

7. Die Zahlen 2014, 1484, 3710 und 6996 sind alle durch 106 teilbar. Zeigen Sie, ohne die Derterminante konkret zu berechnen, dass auch die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

durch 106 teilbar ist.