Serie 14

Determinante

1. Jeder der folgenden Ausdrücke definiert eine Funktion D auf der Menge der 3×3-Matrizen über $\mathbb{R}$. In welchen dieser Fälle ist D eine 3-linear in den Zeilen?

   (a) $D(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$;

   (b) $D(A) = A_{11}^2 + 3A_{11}A_{22}$;

   (c) $D(A) = A_{11}A_{12}A_{33}$;

   (d) $D(A) = A_{13}A_{22}A_{32} + 5A_{12}A_{22}A_{32}$;

   (e) $D(A) = 0$;

   (f) $D(A) = 1$.

2. Beweise die folgende Proposition:

   Proposition (Satz 8.4.4 des Skripts)**.** *Es sei $A \in M_{n\times n}(K)$, und es sei B eine Matrix, die wir von A durch die elementare Zeilenumformung X erhalten.*

   (a) wenn $X = P(r,s)$ fuer $1 \leqslant r < s \leqslant n$, dann gilt $\det(B) = -\det(A)$*;*

   (b) wenn $X = M(r,\lambda)$ fuer $1 \leqslant r \leqslant n$ und $\lambda \in K^\times$, dann gilt $\det(B) = \lambda\det(A)$*;*

   (c) wenn $X = S(r,s,\lambda)$ fuer $1 \leqslant r, s \leqslant n, r \neq s$ und $\lambda \in K^\times$, dann gilt $\det(B) = \det(A)$*.*

*3. Seien x_i und y_i Elemente eines Körpers mit $x_i \neq y_j$ für alle i,j; und sei

$$F_n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) := \det\left(\left(\frac{1}{x_i - y_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}\right).$$

   (a) Beweisen Sie für alle $n \geqslant 1$ die Rekursionsformel

$$F_n(x_1,\ldots,y_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i)(y_i - y_n)}{\prod_{i=1}^{n}(x_i - y_n)\prod_{i=1}^{n-1}(x_n - y_i)} F_{n-1}(x_1,\ldots,y_{n-1}).$$

   Hint. Subtrahieren Sie die letzte Spalte von jeder anderen Spalte. Substrahieren Sie dann ein geeignetes Vielfache der letzten Zeile von jeder anderen Zeile.

   (b) Leiten Sie daraus eine Formel für $F_n(x_1,\ldots,y_n)$ her.

(c) Zeigen Sie, dass mit $c_n := \prod_{i=1}^{n-1} i!$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} = \frac{c_n^4}{c_{2n}}.$$

4. Sei K ein Körper und sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Sei ausserdem det die Determinantenfunktion auf $n \times n$-Matrizen über K. Zeige:

   (a) $\det(\operatorname{adj} A) = \det(A)^{n-1}$;

   (b) $\operatorname{adj}\left(A^T\right) = (\operatorname{adj} A)^T$.

   (A^T ist die Transponierte von A.)

5. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Zeige

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i).$$

   Bemerkung: Produkte dieser Art werden *Vandermonde Determinanten* genannt und die obige Matrix wird *Vandermonde Matrix* genannt.

   Hint. Benutze die Formel

$$x^m - y^m = (x-y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + \cdots + xy^{m-2} + y^{m-1})$$

   und die vorhangehenden Übungen.

6. Führen Sie die folgende Polynomdivision über $\mathbb{R}$ durch:

$$\frac{2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 9x - 5}{x^2 + 2x - 1}$$

7. Führen Sie die folgende Polynomdivision über $\mathbb{F}_2$ durch:

$$\frac{x^7 + x^4 + x^3 + x + 1}{x^2 + x + 1}$$