

# Musterlösung Serie 14

## DETERMINANTE

1. Jeder der folgenden Ausdrücke definiert eine Funktion  $D$  auf der Menge der  $3 \times 3$ -Matrizen über  $\mathbb{R}$ . In welchen dieser Fälle ist  $D$  eine 3-linear in den Zeilen?

- (a)  $D(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ ;
- (b)  $D(A) = A_{11}^2 + 3A_{11}A_{22}$ ;
- (c)  $D(A) = A_{11}A_{12}A_{33}$ ;
- (d)  $D(A) = A_{13}A_{22}A_{32} + 5A_{12}A_{22}A_{32}$ ;
- (e)  $D(A) = 0$ ;
- (f)  $D(A) = 1$ .

*Lösung:*

*Note.* In these solutions, we are considering 3-linearity with respects to rows (Zeilen). Note that even if it is the case for the determinant, row and column  $n$ -linearity is not always equivalent.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrizen stellen Gegenbeispiele für (a), (b), (c) und (f) dar. In allen Fällen müsste  $2D(B_1) = D(B_2)$  gelten, wenn die Abbildung linear in der ersten Zeile wäre. Somit ist ein Gegenbeispiel zu (a) gegeben durch

$$D(B_2) = 4 \neq 6 = 2(1 + 1 + 1) = 2D(B_1).$$

Ein Gegenbeispiel für (b) ist

$$D(B_2) = 10 \neq 8 = 2(1 + 3 \cdot 1 \cdot 1) = 2D(B_1).$$

Ein Gegenbeispiel für (c) ist

$$D(B_2) = 4 \neq 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2D(B_1).$$

Ein Gegenbeispiel für (f) ist

$$D(B_2) = 1 \neq 2 = 2D(B_1).$$

Somit ist  $D$  in diesen Fällen **nicht** 3-linear.

Sei nun  $A$  eine beliebige Matrix mit Zeilen  $R_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Des Weiteren betrachten wir  $D(A) = D(R_1, R_2, R_3)$  als eine Funktion der Zeilen von reellen  $3 \times 3$  Matrizen. Sei  $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^n$  ein Zeilenvektor und sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Im Fall (d) gilt dann

$$\begin{aligned} D(\lambda R_1 + \alpha, R_2, R_3) &= (\lambda A_{13} + \alpha_3)A_{22}A_{32} + 5(\lambda A_{12} + \alpha_2)A_{22}A_{32} \\ &= \lambda(A_{13}A_{22}A_{32} + 5A_{12}A_{22}A_{32}) + (\alpha_3A_{22}A_{32} + 5\alpha_2A_{22}A_{32}) \\ &= \lambda D(R_1, R_2, R_3) + D(\alpha, R_2, R_3). \end{aligned}$$

Somit ist  $D$  linear in der ersten Zeile, ähnliche Rechnungen zeigen, dass  $D$  auch in der zweiten und dritten Zeile linear ist. Somit ist  $D$  3-linear.

Schliesslich gilt für (e)

$$D(\lambda R_1 + \alpha, R_2, R_3) = 0 = \lambda \cdot 0 + 0 = \lambda D(R_1, R_2, R_3) + D(\alpha, R_2, R_3),$$

also ist  $D$  linear in der ersten Zeile. Ähnliche Rechnungen zeigen, dass  $D$  auch linear in der zweiten und dritten Zeile ist. Zusammen ist  $D$  in diesem Fall 3-linear.

2. Beweise die folgende Proposition:

**Proposition** (Satz 8.4.4 des Skripts). *Es sei  $A \in M_{n \times n}(K)$ , und es sei  $B$  eine Matrix, die wir von  $A$  durch die elementare Zeilenumformung  $X$  erhalten.*

- (a) *wenn  $X = P(r, s)$  fuer  $1 \leq r < s \leq n$ , dann gilt  $\det(B) = -\det(A)$ ;*
- (b) *wenn  $X = M(r, \lambda)$  fuer  $1 \leq r \leq n$  und  $\lambda \in K^\times$ , dann gilt  $\det(B) = \lambda \det(A)$ ;*
- (c) *wenn  $X = S(r, s, \lambda)$  fuer  $1 \leq r, s \leq n, r \neq s$  und  $\lambda \in K^\times$ , dann gilt  $\det(B) = \det(A)$ .*

*Lösung:* Siehe Prop. 4.2.3. der Vorlesungsnotizen von Menny Akka.

\*3. Seien  $x_i$  und  $y_i$  Elemente eines Körpers mit  $x_i \neq y_j$  für alle  $i, j$ ; und sei

$$F_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) := \det \left( \left( \frac{1}{x_i - y_j} \right)_{i,j=1, \dots, n} \right).$$

(a) Beweisen Sie für alle  $n \geq 1$  die Rekursionsformel

$$F_n(x_1, \dots, y_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)(y_i - y_n)}{\prod_{i=1}^n (x_i - y_n) \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - y_i)} F_{n-1}(x_1, \dots, y_{n-1}).$$

*Hint.* Subtrahieren Sie die letzte Spalte von jeder anderen Spalte. Subtrahieren Sie dann ein geeignetes Vielfache der letzten Zeile von jeder anderen Zeile.

(b) Leiten Sie daraus eine Formel für  $F_n(x_1, \dots, y_n)$  her.

(c) Zeigen Sie, dass mit  $c_n := \prod_{i=1}^{n-1} i!$  gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} = \frac{c_n^A}{c_{2n}}.$$

*Lösung:*

(a) Sei  $A := (a_{ij})$  mit  $a_{ij} := 1/(x_i - y_j)$ . Durch die erste Subtraktion im Hinweis, die die Determinante nicht ändert, wird der Matrixeintrag  $a_{ij}$  für  $j < n$  zu

$$b_{ij} = \frac{1}{x_i - y_j} - \frac{1}{x_i - y_n} = \frac{y_j - y_n}{(x_i - y_j)(x_i - y_n)},$$

während die Einträge in der letzten Spalte gleich bleiben:  $b_{in} = 1/(x_i - y_n)$ . Dann haben alle Einträge in der  $i$ -ten Zeile einen Faktor  $1/(x_i - y_n)$  und alle Einträge in der  $j$ -ten Spalte mit  $j < n$  einen Faktor  $(y_j - y_n)$ . Verwendet man die Linearität der Determinanten in den Zeilen und Spalten, so erhält man

$$\det A = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (y_j - y_n)}{\prod_{i=1}^n (x_i - y_n)} \det C,$$

mit

$$C = (c_{ij}) := \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1 - y_1} & \cdots & \frac{1}{x_1 - y_{n-1}} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_n - y_1} & \cdots & \frac{1}{x_n - y_{n-1}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Subtrahieren der letzten Zeile von allen anderen Zeilen wird der Eintrag  $c_{ij}$  für  $i, j \leq n-1$  zu

$$d_{ij} = \frac{1}{x_i - y_j} - \frac{1}{x_n - y_j} = \frac{x_n - x_i}{(x_i - y_j)(x_n - y_j)}$$

und die letzte Spalte ist  $(0, \dots, 0, 1)^T$ . Es folgt dann wie oben

$$\det C = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)}{\prod_{j=1}^{n-1} (x_n - y_j)} \det(E)$$

mit

$$E := \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1 - y_1} & \cdots & \frac{1}{x_1 - y_{n-1}} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1} - y_1} & \cdots & \frac{1}{x_{n-1} - y_{n-1}} & 0 \\ * & \cdots & * & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen  $\det(E) = F_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1})$  folgt die Behauptung.

(b) Mit einem Induktionsbeweis folgt die *Cauchysche Determinantenformel*

$$\det \left( \left( \frac{1}{x_i - y_j} \right)_{i,j=1,\dots,n} \right) = \frac{\prod_{i < j} (x_j - x_i)(y_i - y_j)}{\prod_{i,j} (x_i - y_j)}.$$

(c) Mit  $x_i = i$  und  $y_j = -j + 1$  spezialisiert sich die Matrix aus der Aufgabe (a) zu der Matrix

$$(h_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \left( \frac{1}{i + j - 1} \right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

In diesem Fall lautet die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (n-i)(-i+n)}{\prod_{i=1}^n (i+n-1) \prod_{i=1}^{n-1} (n+i-1)} F_{n-1} \\ &= \frac{(n-1)!^2}{n(n+1) \cdots (2n-1)n(n+1) \cdots (2n-2)} F_{n-1} \\ &= \frac{(n-1)!^4}{(2n-1)!(2n-2)!} F_{n-1} \end{aligned}$$

Aus  $F_1 = 1$  erhalten wir dann

$$F_n = \frac{(n-1)!^4 (n-2)!^4 \cdots 1!^4}{(2n-1)!(2n-2)!(2n-3)!(2n-4)! \cdots 2!1!} = \frac{c_n^4}{c_{2n}}$$

4. Sei  $K$  ein Körper und sei  $A \in M_{n \times n}(K)$ . Sei ausserdem  $\det$  die Determinantenfunktion auf  $n \times n$ -Matrizen über  $K$ . Zeige:

- (a)  $\det(\operatorname{adj} A) = \det(A)^{n-1}$ ;
- (b)  $\operatorname{adj}(A^T) = (\operatorname{adj} A)^T$ .

( $A^T$  ist die Transponierte von  $A$ .)

*Lösung:*

(a) Es folgt aus Satz 8.5.16 und der Eigenschaft, dass die Determinante multiplikativ ist, dass

$$\det(A) \det(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^n.$$

Wenn  $\det(A) \neq 0$  ist, sind wir fertig. Wenn  $A$  nicht invertierbar ist, benutzen wir Lemmata 8.5.14 und 8.5.15. Es gilt

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} c_{1j} = \det(A) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^n a_{1j} c_{ij} = 0, \quad 2 \leq i \leq n.$$

Deshalb sind die Zeilen von  $C$  (d.h. die Spalten von  $\operatorname{adj}(A)$ ) nicht linear unabhängig. Wir schließen daraus, dass

$$\det(\operatorname{adj}(A)) = 0 = \det(A)^{n-1}.$$

(b) Dies ergibt sich aus einer direkten Berechnung.

5. Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Zeige

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

*Bemerkung:* Produkte dieser Art werden *Vandermonde Determinanten* genannt und die obige Matrix wird *Vandermonde Matrix* genannt.

*Hint.* Benutze die Formel

$$x^m - y^m = (x - y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + \cdots + xy^{m-2} + y^{m-1})$$

und die vorangehenden Übungen.

*Lösung:* Wir beweisen die Formel durch Induktion. Für  $n = 2$  ist die Formel erfüllt, da

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1$$

gilt. Betrachte nun die  $n$ -te Vandermonde Matrix, kurz  $V_n$ , und nehme an, dass die Formel für die  $n - 1$ -te Determinante bereits bewiesen ist. Wir subtrahieren die erste Zeile von jeder anderen Zeile, was die Determinante nicht ändert, und entwickeln dann nach der ersten Spalte und erhalten

$$\begin{aligned} \det V_n &= \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Erinnerung: es gilt die Formel

$$x^m - y^m = (x - y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + \cdots + xy^{m-2} + y^{m-1}).$$

Für jedes  $i \in \{2, \dots, n\}$ , faktorisieren wir die  $i - 1$ -te Zeile durch  $(x_i - x_1)$  und nutzen  $n$ -Linearität der Determinante um diesen Faktor herauszuziehen. Wir erhalten

$$\det V_n = \prod_{i=2}^n (x_i - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 + x_1 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_1^k x_2^{n-2-k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n + x_1 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_1^k x_n^{n-2-k} \end{pmatrix}.$$

Bemerke, dass

$$(1 \quad x_i \quad x_i^2 \quad \cdots \quad x_i^{n-2}) \cdot \begin{pmatrix} x_1^m \\ x_1^{m-1} \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^m x_1^k x_i^{m-k}.$$

Also kann die letzte Matrix als das Produkt der Vandermonde Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

mit der oberen Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} \\ 0 & 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden. Wir benutzen die Induktionshypothese zusammen mit der Multiplikativität der Determinante und erhalten

$$\begin{aligned} \det V_n &= \prod_{i=2}^n (x_i - x_1) \cdot \prod_{2 \leq j < k \leq n-1} (x_k - x_j) \cdot 1 \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i). \end{aligned}$$

6. Führen Sie die folgende Polynomdivision über  $\mathbb{R}$  durch:

$$\frac{2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 9x - 5}{x^2 + 2x - 1}$$

*Lösung:* Der Quotient ist:  $2x^3 - 7x^2 + 23x - 57$ ; der Rest ist:  $146x - 62$ .

7. Führen Sie die folgende Polynomdivision über  $\mathbb{F}_2$  durch:

$$\frac{x^7 + x^4 + x^3 + x + 1}{x^2 + x + 1}$$

*Lösung:* Der Quotient ist:  $x^5 + x^4 + x + 1$ ; der Rest ist:  $x$ .