D-MATH | Lineare Algebra II | FS 2025

Prof. Dr. S. Zerbes

Serie 15

Polynome, Eigenvektoren/-werte

1. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$.

   (a) Bestimme das charakteristische Polynom von A.

   (b) Bestimme die Eigenwerte von A.

2. Für eine beliebige invertierbare $n \times n$-Matrix A, drücke das charakteristische Polynom von A^{-1} mit Hilfe des charakteristischen Polynoms von A aus.

3. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige durch explizite Rechnung, dass für beliebigen Martrizen $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$
$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$
gilt.

4. Sei A eine nilpotente $n \times n$-Matrix, das heisst eine, für die ein $m \geqslant 1$ existiert mit $A^m = O_{n\times n}$. Zeige, dass der einzige mögliche Eigenwert von A gleich 0 ist. Wann genau ist 0 ein Eigenwert von A?

5. Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F, G \in \mathrm{End}(V)$. Zeige:

   (a) Falls $v \in V$ ein Eigenvektor von $F \circ G$ zum Eigenwert λ ist und $G(v) \neq 0$, dann ist $G(v)$ ein Eigenvektor von $G \circ F$ zum Eigenwert λ.

   (b) Ist V endlichdimensional, so haben $F \circ G$ und $G \circ F$ die gleichen Eigenwerte.

   (c) Gib ein Gegenbeispiel zu (b) an, falls V nicht endlichdimensional ist.

*6. Es seien K ein Körper und $x_0, \ldots, x_n \in K$ paarweise verschiedene Elemente. Ausserdem seien $y_0, \ldots, y_n \in K$ beliebig. Zeigen Sie unter Zuhilfenahme einer Vandermonde-Matrix, dass es genau ein Polynom $p \in K[x]$ mit $p(x_i) = y_i$ für $i = 0, \ldots, n$ und mit $\deg(p) \leqslant n$ gibt.

7. (a) Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, und sei $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ mit f-invarianten Unterräumen V_i. Zeige, dass die algebraische bzw. geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts $\lambda \in \mathbb{K}$ von f gleich der Summe der algebraischen bzw. geometrischen Vielfachheiten von λ als Eigenwert der Endomorphismen $f|_{V_i}$ von V_i ist.

(b) Folgere, dass f diagonalisierbar ist genau dann, wenn $f|_{V_i}$ diagonalisierbar ist für jedes i.

(c) Seien f und g Endomorphismen desselben endlich-dimensionalen Vektorraums V. Zeige, dass f und g *simultan diagonalisierbar* sind (das heisst, dass eine Basis aus simultanen Eigenvektoren für f und g existiert) genau dann, wenn sie miteinander kommutieren und separat diagonalisierbar sind.

    Tipp: Um die Rückwärtsimplikation zu beweisen, zeigen Sie zuerst, dass jeder Eigenraum von f g-invariant ist, d.h. dass g Eigenvektoren von f auf Eigenvektoren von f *im selben Eigenraum* abbildet.