Musterlösung Serie 15

Polynome, Eigenvektoren/-werte

1. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$.

   (a) Bestimme das charakteristische Polynom von A.

   (b) Bestimme die Eigenwerte von A.

   Lösung:

   (a) Wir berechnen mit der Determinantenformel für 3×3-Matrizen:

$$\begin{aligned}\operatorname{char}_A(X) = \det(X \cdot I_3 - A) &= \det \begin{pmatrix} X-3 & 0 & 2 \\ -2 & X & 2 \\ 0 & -1 & X-1 \end{pmatrix} \\ &= (X-3)X(X-1) + 4 + 2(X-3) \\ &= X^3 - 4X^2 + 5X - 2.\end{aligned}$$

   (b) Da das Polynom normiert ist und Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ hat, sind alle Nullstellen in $\mathbb{Q}$ schon in $\mathbb{Z}$ und Teiler des konstanten Koeffizienten -2 . Probieren liefert die Nullstelle $X = 1$. Mit Polynomdivision und erneutem Raten (oder dann der Mitternachtsformel) folgt

$$\operatorname{char}_A(X) = (X-1)\left(X^2 - 3X + 2\right) = (X-1)^2(X-2).$$

   Daher sind die Eigenwerte $\lambda_1 := 1$ und $\lambda_2 := 2$.

2. Für eine beliebige invertierbare $n \times n$-Matrix A, drücke das charakteristische Polynom von A^{-1} mit Hilfe des charakteristischen Polynoms von A aus.

   Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{char}_{A^{-1}}(X) &= \det\left(X \cdot I_n - A^{-1}\right) \\ &= \det\left((-X) \cdot A^{-1} \cdot \left(X^{-1} \cdot I_n - A\right)\right) \\ &= (-X)^n \det\left(A^{-1}\right) \det\left(X^{-1} \cdot I_n - A\right) \\ &= \frac{(-X)^n}{\det(A)} \cdot \operatorname{char}_A\left(X^{-1}\right).\end{aligned}$$

3. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige durch explizite Rechnung, dass für beliebigen Martrizen $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$
$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$
gilt.

Lösung: Sei $AB =: C = (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Die Diagonaleinträge von C sind gegeben durch
$$c_{kk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ik}$$
für $1 \leqslant k \leqslant n$. Daher ergibt sich
$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(C) &= \sum_{k=1}^{n} c_{kk} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ik} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki} \\ &= \mathrm{Tr}(BA).\end{aligned}$$

4. Sei A eine nilpotente $n \times n$-Matrix, das heisst eine, für die ein $m \geqslant 1$ existiert mit $A^m = O_{n\times n}$. Zeige, dass der einzige mögliche Eigenwert von A gleich 0 ist. Wann genau ist 0 ein Eigenwert von A?

Lösung: Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor v. Dann gilt $Av = \lambda v$, und durch Induktion folgt $A^k v = \lambda^k v$ für alle $k \geqslant 0$. Nach Voraussetzung ist dann $\lambda^m v = A^m v = Ov = 0$. Wegen $v \neq 0$ folgt daraus $\lambda = 0$. Also ist $\lambda = 0$ der einzige mögliche Eigenwert von A.

Wir zeigen, dass 0 immer ein Eigenwert von A ist. Wenn A invertierbar wäre, würde die Matrix A^m das Produkt invertierbarer Matrizen sein, was im Widerspruch zu $A^m = O$ steht. Folglich ist A nicht invertierbar. Dies impliziert, dass (die Abbildung "Linksmultiplikation mit") A einen nicht-trivialen Kernel hat und daher 0 ein Eigenwert von A ist.

Aliter: Für $n \geqslant 1$ ist $A^0 = I_n \neq O$. Die kleinste natürliche Zahl $m \geqslant 1$ mit $A^m = 0$ erfüllt daher $A^{m-1} \neq 0$. Es gibt daher einen Vektor $v \in K^n$ mit $w := A^{m-1}v \neq 0$. Wegen
$$Aw = A^m w = 0 \cdot w = 0$$
ist dann w ein Eigenvektor zu A mit Eigenwert 0.

5. Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F, G \in \mathrm{End}(V)$. Zeige:

   (a) Falls $v \in V$ ein Eigenvektor von $F \circ G$ zum Eigenwert λ ist und $G(v) \neq 0$, dann ist $G(v)$ ein Eigenvektor von $G \circ F$ zum Eigenwert λ.

(b) Ist V endlichdimensional, so haben $F \circ G$ und $G \circ F$ die gleichen Eigenwerte.

(c) Gib ein Gegenbeispiel zu (b) an, falls V nicht endlichdimensional ist.

Lösung:

(a) Sei $v \in V$ ein Eigenvektor von $F \circ G$ zum Eigenwert λ mit $G(v) \neq 0$. Dann gilt
$$G \circ F(G(v)) = G(F \circ G(v)) = G(\lambda v) = \lambda G(v).$$
Also ist $G(v)$ auch ein Eigenvektor von $G \circ F$ zum Eigenwert λ.

(b) Sei (λ, v) ein Eigenvektor-Eigenwert-Paar von $F \circ G$. Wir unterscheiden die Fälle $G(v) \neq 0$ und $G(v) = 0$.

Wenn $G(v) \neq 0$ ist, dann ist λ gemäß (a) ein Eigenwert von $G \circ F$.

Wenn $G(v) = 0$ ist, dann gilt $\lambda v = (F \circ G)(v) = F(0) = 0$. Also ist $\lambda = 0$ und wir müssen zeigen, dass 0 ein Eigenwert von $G \circ F$ ist. Dies ist äquivalent dazu, dass $G \circ F$ einen nicht-trivialen Kernel hat, was genau dann der Fall ist, wenn $G \circ F$ Rang $< \dim(V)$ hat. Nun gilt aber
$$\operatorname{rank}(G \circ F) \leqslant \min(\operatorname{rank}(G), \operatorname{rank}(F)) < \dim(V),$$
da G gemäß der Annahme ein Endomorphismus von V mit nicht-trivialem Kern ist. Daher ist 0 ein Eigenwert von $G \circ F$.

Dies zeigt, dass jeder Eigenwert von $F \circ G$ ein Eigenwert von $G \circ F$ ist. Die umgekehrte Inklusion ergibt sich durch Vertauschen von G und F wie oben.

(c) Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \left\{(a_n)_{n \geqslant 0}\right\}$ der Vektorraum aller Folgen in $\mathbb{R}$. Definiere die linearen Abbildungen $F, G : V \to V$ durch
$$\begin{aligned} F &: (a_0, a_1, a_2, \ldots) \mapsto (0, a_0, a_1, a_2, \ldots) \\ G &: (a_0, a_1, a_2, \ldots) \mapsto (a_1, a_2, \ldots). \end{aligned}$$
Dann ist $G \circ F$ die Identität mit dem einzigen Eigenwert 1, wohingegen $F \circ G$ wegen
$$(F \circ G)(1, 0, 0, \cdots) = (0, 0, 0, \cdots)$$
auch 0 als Eigenwert besitzt.

*6. Es seien K ein Körper und $x_0, \ldots, x_n \in K$ paarweise verschiedene Elemente. Ausserdem seien $y_0, \ldots, y_n \in K$ beliebig. Zeigen Sie unter Zuhilfenahme einer Vandermonde-Matrix, dass es genau ein Polynom $p \in K[x]$ mit $p(x_i) = y_i$ für $i = 0, \ldots, n$ und mit $\deg(p) \leqslant n$ gibt.

Lösung: Wir betrachten die Vandermonde-Matrix
$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Wir wissen bereits, dass

$$\det(V) = \prod_{i=0}^{n} \prod_{j=i+1}^{n} (x_i - x_j)$$

gilt, und da die x_i nach Voraussetzung paarweise verschieden sind, gilt also $\det(V) \neq 0$. Daher ist V invertierbar. Wir definieren

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

und zeigen, dass das Polynom

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

das einzige Polynom vom Grad kleiner gleich n mit $p(x_i) = y_i$ für $i = 0, \ldots, n$ ist. Es gilt nämlich

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_n x_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x_0) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

also erfüllt p die gewünschten Gleichungen, und natürlich ist der Grad von p nicht größer als n. Nun sei

$$q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$$

ein weiteres Polynom vom Grad nicht größer als n mit $q(x_i) = y_i$ für alle $i = 0, \ldots, n$. Mit der gleichen Rechnung wie in (1) folgt dann, dass

$$V \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(x_0) \\ \vdots \\ q(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Es folgt schließlich

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

und damit $p = q$, also die Eindeutigkeitsaussage.

7. (a) Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, und sei $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ mit f-invarianten Unterräumen V_i. Zeige, dass die algebraische bzw. geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts $\lambda \in \mathbb{K}$ von f gleich der Summe der algebraischen bzw. geometrischen Vielfachheiten von λ als Eigenwert der Endomorphismen $f|_{V_i}$ von V_i ist.

   (b) Folgere, dass f diagonalisierbar ist genau dann, wenn $f|_{V_i}$ diagonalisierbar ist für jedes i.

   (c) Seien f und g Endomorphismen desselben endlich-dimensionalen Vektorraums V. Zeige, dass f und g *simultan diagonalisierbar* sind (das heisst, dass eine Basis aus simultanen Eigenvektoren für f und g existiert) genau dann, wenn sie miteinander kommutieren und separat diagonalisierbar sind.

   Tipp: Um die Rückwärtsimplikation zu beweisen, zeigen Sie zuerst, dass jeder Eigenraum von f g-invariant ist, d.h. dass g Eigenvektoren von f auf Eigenvektoren von f *im selben Eigenraum* abbildet.

Lösung:

(a) Für jedes $1 \leqslant i \leqslant r$ wähle eine geordnete Basis B_i von V_i. In aufsteigender Reihenfolge zusammengesetzt ergeben diese eine geordnete Basis B von V. Die Darstellungsmatrix von f bezüglich B ist dann die Blockdiagonalmatrix mit Diagonalblöcken $M^{B_i}_{B_i}(f|_{V_i})$ für $1 \leqslant i \leqslant r$. Das charakteristische Polynom von f ist deshalb das Produkt der charakteristischen Polynome von $f|_{V_i}$; das heisst, es gilt

$$\mathrm{char}_f(X) = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{char}_{f|_{V_i}}(X) \tag{2}$$

Für jedes $\lambda \in K$ ist daher die arithmetische Vielfachheit von λ als Eigenwert von f gleich der Summe über $1 \leqslant i \leqslant r$ der arithmetischen Vielfachheit von λ als Eigenwert von $f|_{V_i}$.

Sodann betrachte einen beliebigen Vektor $v = v_1 + \cdots + v_r$ mit allen $v_i \in V_i$. Dann gilt $f(v) = f(v_1) + \ldots + f(v_r)$ mit allen $f(v_i) \in V_i$. Da $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ eine direkte Summe ist, gilt die Gleichung

$$f(v_1) + \ldots + f(v_r) = f(v) = \lambda v = \lambda v_1 + \cdots + \lambda v_r$$

genau dann, wenn $f(v_i) = \lambda v_i$ ist für alle i. Also gilt

$$\mathrm{Eig}_\lambda(f) \quad = \quad \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Eig}_\lambda(f|_{V_i})$$

und somit

$$\dim \mathrm{Eig}_\lambda(f) \quad = \quad \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{Eig}_\lambda(f|_{V_i}).$$

Daher ist die geometrische Vielfachheit von λ als Eigenwert von f die Summe über $1 \leqslant i \leqslant r$ der geometrischen Vielfachheiten von λ als Eigenwert von $f|_{V_i}$.

(b) Nach einem Satz der Vorlesung ist ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums genau dann diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert die geometrische Vielfachheit mit der arithmetischen Vielfachheit übereinstimmt.

Aus der Formel (1) folgt, dass $\mathrm{char}_f(X)$ genau dann in Linearfaktoren zerfällt, wenn $\mathrm{char}_{f|_{V_i}}(X)$ in Linearfaktoren zerfällt für jedes i. Sodann betrachte ein beliebiges $\lambda \in K$. Dann folgt aus (a) sowie dem Umstand, dass die geometrische Vielfachheit stets $\leqslant$ der arithmetischen Vielfachheit ist, dass diese Vielfachheiten für f genau dann übereinstimmen, wenn sie für jedes $f|_{V_i}$ übereinstimmen. Also ist f genau dann diagonalisierbar, wenn jedes $f|_{V_i}$ diagonalisierbar ist.

(c) Angenommen f und g sind simultan diagonalisierbar. Dann sind f und g auch separat diagonalisierbar. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V bestehend aus simultanen Eigenvektoren für f und g zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respektive $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Für jedes Element $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in V$ gilt dann

$$\begin{aligned} f\left(g\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right)\right) &= f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i \lambda_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mu_i v_i = g\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i\right) = g\left(f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right)\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f und g kommutieren.

Umgekehrt nehmen wir an, dass f und g kommutieren und separat diagonalisierbar sind. Weil f diagonalisierbar ist, existieren Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ von f mit $V = \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f)$. Für jedes $1 \leqslant i \leqslant r$ und $v \in \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f)$ gilt wegen der Kommutativität von f und g:

$$f(g(v)) = g(f(v)) = g(\lambda_i v) = \lambda_i g(v)$$

und daher ist $g(v) \in \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f)$. Die Eigenräume von f sind somit g-invariant. Weil g diagonalisierbar ist, ist also auch $g|_{\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f)}$ diagonalisierbar für jedes $1 \leqslant i \leqslant r$ nach Teil (b). Daher existiert eine Basis B_i von $\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f)$ aus Eigenvektoren von g. Zusammen ist damit $B := B_1 \cup \cdots \cup B_r$ eine Basis von V aus simultanen Eigenvektoren von f und g; daher sind f und g simultan diagonalisierbar.