D-MATH | Lineare Algebra II | FS 2025

Prof. Dr. S. Zerbes

Serie 16

Eigenvektoren/-werte

Durchgehend auf diesem Übungsblatt wird angenommen, dass $\mathbb{K}$ ein Körper ist.

1. Betrachte die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ aus Serie 15 Übung 2.
   (a) Bestimme die Eigenräume den Eigenwerten von A.
   (b) Bestimme die algebraische und geometrische Vielfachheit jedes Eigenwerts von A.

2. Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ und überprüfe, ob die Matrizen diagonalisierbar sind. Wenn sie es sind, finde die Basiswechselmatrix, die sie in eine Diagonalmatrix umwandelt.
   (a) $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
   (b) $B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
   (c) $C := \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 & -7 \\ -3 & -1 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

3. Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{Hom}(V)$. Nehme an, dass $f^2 = \mathrm{id}$ ist und, dass -1 kein Eigenwert von f ist. Zeige, dass $f = \mathrm{id}$.

4. Sei V ein endlichdimensional $\mathbb{K}$-Vektorraum, $T \in \mathrm{Hom}(V)$, und $v \in V$ mit $v \neq 0$. Sei $p \in \mathbb{K}[x]$ ein nichttriviales Polynom minimalen Grades, sodass $p(T)v = 0$. Zeige, dass jede Nullstelle von p ein Eigenwert von T ist.

5. Betrachten Sie den Raum $C^\infty(\mathbb{R})$ der glatten Funktionen über $\mathbb{R}$ und die Abbildung

$$T: \begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}) & \to & C^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$$

   Finden Sie die Eigenwerte und die entsprechenden Eigenfunktionen (dies ist ein Synonym für Eigenvektoren, wenn man in einem Raum arbeitet, dessen Elemente Funktionen sind) von T.

6. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ und sei

$$p_A(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

(a) Zeige, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $a_0 \neq 0$.

(b) Zeige, dass für invertierbare $A \in M_{n\times n}(K)$ gilt:

$$A^{-1} = \left(-\frac{1}{a_0}\right)\left((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I_n\right)$$

(c) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Finde ein Polynom $p(x)$ mit $p(A) = A^{-1}$.