Musterlösung Serie 16

Eigenvektoren/-werte

Durchgehend auf diesem Übungsblatt wird angenommen, dass $\mathbb{K}$ ein Körper ist.

1. Betrachte die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ aus Serie 15 Übung 2.

   (a) Bestimme die Eigenräume den Eigenwerten von A.

   (b) Bestimme die algebraische und geometrische Vielfachheit jedes Eigenwerts von A.

   Lösung:

   (a) Sie haben auf dem vorherigen Übungsblatt berechnet, dass

$$\mathrm{char}_A(X) = (X-1)^2(X-2).$$

   Daraus folgerten Sie, dass die Eigenwerte von A gegeben sind durch $\lambda_1 := 1$ und $\lambda_2 := 2$. Wir haben

$$\mathrm{Eig}_A(\lambda_1) = \ker(A - \lambda_1 I_3) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Nach einer kurzen Zeilenreduktion finden wir

$$\mathrm{Eig}_A(\lambda_1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

   Für λ_2 haben wir

$$\mathrm{Eig}_A(\lambda_2) = \ker(A - \lambda_2 I_3) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Unter Verwendung eines ähnlichen Verfahrens erhalten wir

$$\mathrm{Eig}_A(\lambda_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(b) Die arithmetische Vielfachheit ist die Vielfachheit der Eigenwerte als Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Deshalb ist die arithmetische Vielfachheit von λ_1 gleich 2 und von λ_2 gleich 1. Die geometrische Vielfachheit ist die Dimension des Eigenraumes. Wie oben berechnet, haben sowohl λ_1 als auch λ_2 eine geometrische Vielfachheit von 1.

2. Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ und überprüfe, ob die Matrizen diagonalisierbar sind. Wenn sie es sind, finde die Basiswechselmatrix, die sie in eine Diagonalmatrix umwandelt.

   (a) $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

   (b) $B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $C := \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 & -7 \\ -3 & -1 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

   Lösung:

   (a) Die Matrix A hat das charakteristische Polynom

$$\mathrm{char}_A(X) = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$$

   und damit die Eigenwerte 2 und 3 , jeweils mit der arithmetischen Vielfachheit 1. Die Eigenräume $E_{\lambda,A}$ zum Eigenwert λ sind

$$\mathrm{Eig}_2(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathrm{Eig}_3(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

   Da für jeden Eigenwert von A die geometrische Vielfachheit mit der arithmetischen Vielfachheit übereinstimmt, ist A diagonalisierbar. Sei

$$S_A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Dann haben wir

$$S_A^{-1} A S_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Denken Sie daran, dass die Eigenvektoren einer diagonalisierbaren Matrix $M \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ bilden, bezüglich der A diagonal ist.

(b) Die Matrix B hat das charakteristische Polynom

$$\mathrm{char}_B(X) = X^3 - 5X^2 + 2X + 8 = (X-4)(X-2)(X+1).$$

und damit die Eigenwerte 4,2,-1, jeweils mit der arithmetischen Vielfachheit 1. Die Eigenräume sind

$$\mathrm{Eig}_4(B) = \left\langle \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathrm{Eig}_2(B) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathrm{Eig}_{-1}(B) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Da für jeden Eigenwert von B die geometrische Vielfachheit mit der arithmetischen Vielfachheit übereinstimmt, ist B diagonalisierbar. Betrachte

$$S_B := \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass

$$S_B^{-1} B S_B = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Matrix C hat das charakteristische Polynom

$$\mathrm{char}_C(X) = X^4 - 4X^3 + 3X^2 + 4X - 4 = (X-1)(X+1)(X-2)^2.$$

und damit die Eigenwerte 1, -1, 2 mit den jeweiligen arithmetischen Vielfachheiten 1, 1, 2. Die Eigenräume sind

$$\mathrm{Eig}_1(C) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathrm{Eig}_{-1}(C) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathrm{Eig}_2(C) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Der Eigenwert 2 hat arithmetische Vielfachheit 2, aber geometrische Vielfachheit 1. Die Matrix C ist also nicht diagonalisierbar.

3. Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Nehme an, dass $f^2 = \mathrm{id}$ ist und, dass -1 kein Eigenwert von f ist. Zeige, dass $f = \mathrm{id}$.

Lösung: Beachten Sie, dass jeder Vektor in V geschrieben werden kann als

$$v = \frac{1}{2}(v + fv - fv + v).$$

Einerseits haben wir,

$$(f - \mathrm{id})(v + fv) = f^2 v - v = 0,$$

da $f^2 = \mathrm{id}$. Andererseits haben wir,

$$(f + \mathrm{id})(v - fv) = v - f^2 v = 0.$$

Daher gilt als Vektorraum,

$$V = \ker(f - \mathrm{id}) + \ker(f + \mathrm{id}).$$

Da -1 kein Eigenwert von f ist, gilt

$$\ker(f - (-1)\mathrm{id}) = \ker(f + \mathrm{id}) = \{0\}.$$

Wir schließen, dass $V = \ker(f - \mathrm{id})$ ist, d.h. für alle $v \in V$ gilt

$$fv - v = 0,$$

was impliziert, dass $f = \mathrm{id}$.

Aliter: Since $f^2 = id$, the polynomial $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ annulates f. Hence the minimal polynomial of f divides $(X - 1)(X + 1)$. Since any zero of the minimal polynomial is an eigenvalue, and since -1 is not an eigenvalue, it follows that $m_f = X - 1$. Thus $f = id$.

4. Sei V ein endlichdimensional $\mathbb{K}$-Vektorraum, $T \in \mathrm{End}(V)$, und $v \in V$ mit $v \neq 0$. Sei $p \in \mathbb{K}[x]$ ein nichttriviales Polynom minimalen Grades, sodass $p(T)v = 0$. Zeige, dass jede Nullstelle von p ein Eigenwert von T ist.

   Lösung: Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von p. Mit anderen Worten, p faktorisiert sich als $(x - \lambda)q(x)$ in $\mathbb{K}[x]$. Durch Annahme haben wir dann

   $$0 = p(T)v = (T - \lambda\mathrm{id})q(T)v.$$

   Angenommen, zum Widerspruch, dass λ kein Eigenwert von T ist. Dann ist $T - \lambda\mathrm{id}$ injektiv, also folgt aus der obigen Gleichung, dass

   $$q(T)v = 0.$$

   Dies widerspricht jedoch der Minimalitätsannahme über den Grad von p. Daher muss λ ein Eigenwert von T sein. Da λ eine beliebige $\mathbb{K}$-Nullstelle von p war, folgt daraus der Beweis.

5. Betrachten Sie den Raum $C^\infty(\mathbb{R})$ der glatten Funktionen über $\mathbb{R}$ und die Abbildung

   $$T : \begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}) & \to & C^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$$

   Finden Sie die Eigenwerte und die entsprechenden Eigenfunktionen (dies ist ein Synonym für Eigenvektoren, wenn man in einem Raum arbeitet, dessen Elemente Funktionen sind) von T.

Lösung: Für $\lambda \in K$ können wir eine Idee der Lösung bekommen, indem wir die lineare gewöhnliche Differentialgleichung lösen

$$\frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x} = \lambda f(x).$$

Wir haben

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f(x)} \frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x} = \lambda \\ \Longrightarrow \quad & \int \frac{1}{f(x)} \frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x} \mathrm{d}\, x = \int \lambda \, \mathrm{d}\, x \end{aligned}$$

Durch Ersetzen von u durch $f(x)$ auf der linken Seite erhalten wir $\mathrm{d}\, u = \frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x} \mathrm{d}\, x$

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{u} \mathrm{d}\, u = \lambda x + C, \quad C \in K \\ \Longrightarrow \quad & \log(u) = \lambda x + C \\ \Longrightarrow \quad & \log(f(x)) = \lambda x + C \\ \Longrightarrow \quad & f(x) = e^{\lambda x + C}. \end{aligned}$$

Daher ist die Familie $\{f(x) = f(0)e^{\lambda x} \mid \lambda \in K\}$ eine Menge von Eigenfunktionen von T, und zumindest formal sollten Eigenfunktionen die Form $f(x) = f(0)e^{\lambda x}$ für $\lambda \in K$ haben.

Um zu überprüfen, dass dies die einzigen möglichen Lösungen sind, verwenden wir den folgenden Trick: Betrachten Sie eine Lösung f_0 der Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x} = \lambda f(x)$ und definieren Sie die modifizierte Funktion

$$g_0(x) = e^{-\lambda x} f_0(x).$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\, g_0}{\mathrm{d}\, x}(x) &= -\lambda e^{-\lambda x} f_0(x) + \lambda e^{-\lambda x} f_0(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir schließen, dass $g_0(x)$ konstant ist, daher gilt für alle $x \in \mathbb{R}$,

$$g_0(x) = g_0(0) = f_0(0) \Leftrightarrow f_0(x) = f_0(0)e^{\lambda x}.$$

6. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ und sei

$$p_A(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

das charakteristische Polynom von A.

(a) Zeige, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $a_0 \neq 0$.

(b) Zeige, dass für invertierbare $A \in M_{n\times n}(K)$ gilt:

$$A^{-1} = \left(-\frac{1}{a_0}\right)\left((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I_n\right)$$

(c) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Finde ein Polynom $p(x)$ mit $p(A) = A^{-1}$.

Lösung:

(a) $\det(A) = p_A(0) = a_0$. Wenn die Determinante $\neq 0$ ist, dann ist die Matrix invertierbar.

(b) Aus Cayley-Hamilton wissen wir, dass $p_A(A) = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & a_0 I_n = -((-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A) \\
\Longleftrightarrow\ & a_0 A^{-1} = -((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1 I_n) \\
\Longleftrightarrow\ & A^{-1} = \left(-\frac{1}{a_0}\right)((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1 I_n).
\end{aligned}$$

(c) Das charakteristische Polynom von A ist

$$p_A(x) = -x^3 + 6x^2 + 3x - 18$$

und wir setzen in die Formel von (b) ein, um

$$A^{-1} = -\frac{1}{18}A^2 + \frac{1}{3}A + \frac{1}{6}I_3\,.$$

zu bekommen.