D-MATH | Lineare Algebra II | FS 2025

Prof. Dr. S. Zerbes

Serie 17

Minimalpolynom, Jordansche Normalenform

Durchgehend auf diesem Übungsblatt wird angenommen, dass K ein Körper ist. Ausserdem werden die Begriffe "Hauptraum" und "verallgemeinerter Eigenraum" synonym verwendet.

1. Sei A eine beliebige $n \times n$-Matrix vom Rang r. Zeige, dass der Grad des Minimalpolynoms von A kleiner oder gleich $r+1$ ist.

2. Sei A eine $n \times n$-Matrix, mit $n \geqslant 1$. Beweise, dass der Unterraum $\langle I_n, A, A^2, \ldots \rangle$ von $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ Dimension $\leqslant n$ hat.

3. Bestimme die Jordansche Normalenform der folgenden Matrix über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{F}_3$:
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Bestimme die verallgemeinerte Eigenräume über $\mathbb{C}$ der folgenden Matrizen:
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$C := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 2 \\ -7 & 3 & -3 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Sei $K = \mathbb{C}$. Betrachte den Raum $K[x]_n$ der Polynome über K vom Grad kleinergleich n. Bestimme eine Jordannormalform der Endomorphismen

   (a)
$$\begin{array}{rccc} D_1: & K[x]_n & \to & K[x]_n \\ & p(x) & \mapsto & p'(x) \end{array}$$

   (b)
$$\begin{array}{rccc} D_2: & K[x]_n & \to & K[x]_n \\ & p(x) & \mapsto & p''(x) \end{array}$$

6. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{C}).$$
Finde einen Vektor, der eine Jordan-Kette der Länge 3 von A erzeugt.

*7. Die Motivation hinter der Jordan-Normalform liegt oft in dem Bestreben, die Matrix so zu gestalten, dass sie möglichst viele Nullen enthält. Jedoch stellt sich die Frage, ob die Anzahl der Nullen tatsächlich durch die Jordan-Normalform maximiert wird. Anders ausgedrückt: Existiert eine quadratische Matrix A über einem Körper, die mehr Nullen aufweist als ihre Jordan-Normalform J?