Musterlösung Serie 17

MINIMALPOLYNOM, JORDANSCHE NORMALENFORM

Durchgehend auf diesem Übungsblatt wird angenommen, dass K ein Körper ist. Ausserdem werden die Begriffe “Hauptraum” und “verallgemeinerter Eigenraum” synonym verwendet.

1. Sei A eine beliebige $n \times n$-Matrix vom Rang r. Zeige, dass der Grad des Minimalpolynoms von A kleiner oder gleich $r+1$ ist.

   Lösung: Nach der Definition des Rangs ist das Bild von L_A ein Unterraum der Dimension r. Betrachte die Einschränkung

   $$F := L_A|_{\mathrm{Bild}(L_A)} : \mathrm{Bild}(L_A) \to \mathrm{Bild}(L_A).$$

   Das charakteristische Polynom $q(X) := \mathrm{char}_F(X)$ von F hat Grad r und nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $q(F) = 0$.

   Für $p(X) := q(X) \cdot X$ folgt für alle $v \in K^n$

   $$p(L_A)(v) = (q(L_A) \circ L_A)(v) = q(L_A)(Av) = q(F)(Av) = 0,$$

   also $p(L_A) = 0$, also $p(A) = 0$. Nach Definition teilt das Minimalpolynom von A das Polynom $p(X)$. Folglich ist der Grad des ersteren kleiner oder gleich dem Grad von $p(X)$, also kleiner oder gleich $r+1$.

2. Sei A eine $n \times n$-Matrix, mit $n \geqslant 1$. Beweise, dass der Unterraum $\langle I_n, A, A^2, \ldots \rangle$ von $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ Dimension $\leqslant n$ hat.

   Lösung: Der Unterraum $W := \langle I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1} \rangle$ von $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ ist von n Elementen erzeugt, hat also Dimension $\leqslant n$. Es genügt daher zu zeigen, dass zeigen:

   Behauptung: Für alle $k \geqslant 0$ ist $A^k \in W$. Wir beweisen dies durch Induktion nach k. Induktionsverankerung: Für $k \leqslant n-1$ gilt dies nach Konstruktion von W. Oops: Im Fall $n = 0$ ist diese Aussage leer, also gar keine Verankerung. Aber dann ist sowieso $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ der Nullraum und der fragliche Raum ebenso, hat also Dimension $n = 0$, wie gewünscht. Im folgenden sei daher $n \geqslant 1$. Induktionsschritt: Sei $k \geqslant n$. Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei richtig für alle kleineren Werte von k. Das charakteristische Polynom von A ist normiert vom Grad n; schreiben wir es in der $\mathrm{Form}_{\mathrm{char}_A}(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $\mathrm{char}_A(A) = 0$, also

   $$A^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i.$$

Durch Multiplizieren mit A^{k-n} ergibt sich daraus

$$A^k = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^{i+k-n} = -\sum_{j=k-n}^{k-1} a_{j-k+n} A^j.$$

Nach Induktionsvoraussetzung liegen alle A^j auf der rechten Seite in W; daher liegt auch A^k in W, was zu zeigen war.

3. Bestimme die Jordansche Normalenform der folgenden Matrix über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{F}_3$:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung: Über $\mathbb{R}$ hat A das charakteristische Polynom $(X-1)^2(X-4)$. Der Eigenraum zum Eigenwert 4 hat also Dimension 1. Sodann berechnen wir $\operatorname{rank}(A - I_3) = 1$; deshalb hat der Eigenraum zum Eigenwert 1 die Dimension 2. Deshalb existiert eine Basis aus Eigenvektoren und die Matrix ist diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ mit der Jordanschen Normalform

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Über $\mathbb{F}_3$ ist das charakteristische Polynom gleich $(X-1)^3$; somit besitzt A genau einen verallgemeinert Eigenraum zum Faktor $X - 1$. Wir rechnen

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und $(A - I_3)^k = 0$ für $k \geqslant 2$. Aus $\dim \operatorname{Kern}(A - I_3) = 2$ folgt, dass es jeweils einen Jordanblock der Grösse 1 und 2 gibt. Somit hat die Matrix A über $\mathbb{F}_3$ die Jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Bestimme die verallgemeinerte Eigenräume über $\mathbb{C}$ der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 2 \\ -7 & 3 & -3 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

A: Die Matrix A hat das charakteristische Polynom X^4. Es existiert also genau ein verallgemeinert Eigenraum zum irreduziblen Faktor X, der nach dem Satz über die Hauptraumzerlegung (Theorem 14.3.15 des Skripts) gleich $\mathbb{R}^4$ sein muss: $\widetilde{\mathrm{Eig}}_X(A) = \mathbb{R}^4$.

B : Die Matrix B hat das charakteristische Polynom $(X-1)^3(X+1)$. Der verallgemeinert Eigenraum zum Faktor $X+1$ ist

$$\widetilde{\mathrm{Eig}}_{X+1}(B) \;=\; \ker(B+I_4) \;=\; \mathrm{Eig}_{-1}(B) \;=\; \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Der verallgemeinert Eigenraum zum Faktor $X-1$ ist nach Definition der Kern der Abbildung $(B-I_4)^3$. Wir haben

$$(B-I_4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix},$$

also

$$\widetilde{\mathrm{Eig}}_{X-1}(B) \;=\; \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

C : Das charakteristische Polynom der Matrix C über $\mathbb{C}$ ist

$$\mathrm{char}_C(X) \;=\; X^3 - 5X^2 + 8X - 6 \;=\; (X-3)(X-(1-i))(X-(1+i))\,.$$

Deshalb ist die geometrische Vielfachheit genau 1 für jede Eigenwert. Es folgt, dass die verallgemeinerten Eigenräume die gleichen sind wie die üblichen Eigenräume, d.h. wir müssen nur 1 Eigenvektor für jeden Eigenwert finden. Eine kurze Berechnung ergibt

$$\widetilde{\mathrm{Eig}}_C(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \; \widetilde{\mathrm{Eig}}_C(1{+}i) = \left\langle \begin{pmatrix} -3-i \\ 1+3i \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \; \widetilde{\mathrm{Eig}}_C(1{-}i) = \left\langle \begin{pmatrix} -3+i \\ 1-3i \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$D:$ Das charakteristische Polynom der Matrix D ist

$$\mathrm{char}_D(X) \;=\; X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 12X + 4 \;=\; (X-2)^2 \cdot (X-1)^2 \,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Eig}}_{X-2}(D) &= \ker((D-2I_4)^2) \\ &= \ker\begin{pmatrix} 8 & -2 & 3 & -3 \\ 13 & -3 & 5 & -5 \\ -8 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Eig}}_{X-1}(D) &= \ker((D-I_4)^2) \\ &= \ker\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle\end{aligned}$$

5. Sei $K = \mathbb{C}$. Betrachte den Raum $K[x]_n$ der Polynome über K vom Grad kleinergleich n. Bestimme eine Jordannormalform der Endomorphismen

   (a)
   $$\begin{array}{rccc} D_1: & K[x]_n & \to & K[x]_n \\ & p(x) & \mapsto & p'(x) \end{array}$$

   (b)
   $$\begin{array}{rccc} D_2: & K[x]_n & \to & K[x]_n \\ & p(x) & \mapsto & p''(x) \end{array}$$

   Solution:

   (a) Die Darstellungsmatrix von D_1 bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B}$ ist

   $$[D_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & n \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

   Wir lesen ab, dass der einzige Eigenwert 0 und $\dim\ker\left([D]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right) = 1$ sind. Also ist eine Jordannormalform von D der Jordanblock $J_{0,n+1}$.

(b) Es gilt

$$[D_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2! & & & \\ & 0 & 0 & 3! & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 0 & \frac{n!}{(n-2)!} \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir lesen ab, dass der einzige Eigenwert 0 und $\dim\ker\left([D_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right) = 2$ sind. Jede Jordannormalform besteht also aus zwei Blöcken mit Nullen auf der Diagonalen.

Um die Grösse der Blöcke zu bestimmen, berechnen wir das Minimalpolynom von $[D_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$. Dieses teilt das charakteristische Polynom X^{n+1}. Des Weiteren ist für $k \geqslant 1$ die Matrix $([D_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})^k$ die Darstellungsmatrix des Endomorphismus

$$\underbrace{D_2 \circ D_2 \circ \cdots \circ D_2}_{k \text{ Faktoren}} = \underbrace{D \circ D \circ \cdots \circ D}_{2k \text{ Faktoren}}.$$

Die kleinste Potenz, für welche sie verschwindet ist also $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$, was impliziert, dass $X^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}$ das Minimalpolynom von $[D_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ist. Also hat der grösste Block einer Jordannormalform von D_2 die Grösse $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. Da genau zwei Blöcke vorkommen, hat der andere Grösse $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.

6. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{C}).$$

Finde einen Vektor, der eine Jordan-Kette der Länge 3 von A erzeugt.

Lösung: Beachten Sie, dass 6 der einzige Eigenwert von A ist und dass $\dim \mathrm{Eig}_A(6) = 2$. Wir berechnen, dass die erste Potenz von $A - 6I_4$, die verschwindet, 3 ist. Die Bedingungen für einen Vektor $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathbb{C}^4$, um in $\ker(A - 6I_4)$ bzw. $\ker((A-6I_4)^2)$ zu sein, lauten

$$\begin{cases} z + w &= -x \\ z + w &= -y \end{cases}, \text{ bzw. } \left\{ z + w = -y \right. .$$

Daher ist

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein geeigneter Kandidat. Wir überprüfen, dass

$$(A - 6I_4)v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$(A - 6I_4)^2 v = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass v eine Jordan-Kette der Länge 3 für A erzeugt.

*7. Die Motivation hinter der Jordan-Normalform liegt oft in dem Bestreben, die Matrix so zu gestalten, dass sie möglichst viele Nullen enthält. Jedoch stellt sich die Frage, ob die Anzahl der Nullen tatsächlich durch die Jordan-Normalform maximiert wird. Anders ausgedrückt: Existiert eine quadratische Matrix A über einem Körper, die mehr Nullen aufweist als ihre Jordan-Normalform J?

Lösung: Für eine nilpotente Matrix A stimmt die Aussage. Denn sei J ihre Jordannormalform mit k Jordanblöcken. Dann hat der Eigenraum $\mathrm{Eig}_0(A) = \mathrm{Kern}(L_A)$ die Dimension k, also hat A den Rang $n-k$. Daher hat A genau $n-k$ linear unabhängige Spalten, also auch mindestens $n-k$ von Null verschiedene Einträge. Dies ist aber genau die Anzahl der von Null verschiedenen Einträge von J, da jeder Jordanblock der Grösse m zum Eigenwert 0 genau $m-1$ von Null verschiedene Einträge hat. Somit ist die Minimalität für nilpotente Matrizen gegeben.

Im Allgemeinen gilt die Aussage aber nicht. Ein Gegenbeispiel über $\mathbb{Q}$ ist:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hier ist A eine Blockdreiecksmatrix aus 2×2-Blöcken, bei der jeder Block das charakteristische Polynom $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ hat. Also hat A die Eigenwerte ± 1 jeweils mit arithmetischer Multiplizität 2. Eine direkte Rechnung zeigt aber, dass jeder Eigenwert die geometrische Multiplizität 1 hat. Daher hat A die angegebene Jordannormalform. Diese enthält 10 Nullen, gegenüber 11 Nullen in A.

Bemerkung: Auch wenn die Jordannormalform weniger Nullen hat als die ursprüngliche Matrix, werden die Rechnungen damit in der Regel trotzdem einfacher, weil die Haupträume nicht mehr durcheinander geworfen werden.