D-MATH | Lineare Algebra II | FS 2025

Prof. Dr. S. Zerbes

Serie 18

Jordansche Normalenform

Durchgehend auf diesem Übungsblatt wird angenommen, dass K ein algebraisch abgeschlossener Körper ist. Ausserdem werden die Begriffe "Hauptraum" und "verallgemeinerter Eigenraum" synonym verwendet.

1. Bestimme die Jordansche Normalenform und eine zugehörige Basiswechselmatrix der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & & & \\ & 7 & 2 & & \\ & & 7 & 3 & \\ & & & 7 & 4 \\ & & & & 7 \end{pmatrix} \in M_{5\times 5}(\mathbb{C}).$$

2. Bestimme die Jordansche Normalenform und eine zugehörige Basiswechselmatrix der komplexen Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Sei N eine komplexe 3×3 nilpotente Matrix.

   (a) Zeige, dass $A = I_3 + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$ die Gleichung $A^2 = I + N$ erfüllt. Wir sagen, dass A eine Quadratwurzel von $I + N$ ist.

   (b) Verwende (a), um zu zeigen, dass wenn $\lambda \neq 0$ ist, dann $\lambda I_3 + N$ eine Quadratwurzel hat.

   (c) Sei B eine invertierbare 3×3 Matrix. Zeige, dass B eine Quadratwurzel hat.
   Hinweis. Verwenden Sie Argumente ähnlich denen, die Sie in (a) und (b) verwendet haben, um eine allgemeine Formel für die Quadratwurzel von $\mu I_2 + \widetilde{N}$ zu finden, wobei $\widetilde{N}$ eine 2×2 komplexe nilpotente Matrix ist und μ eine nicht-null komplexe Zahl ist.

4. Angenommen, eine Matrix $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{C})$ hat das folgende charakteristische Polynom. Finde alle möglichen JNFs (Jordan Normalformen) von A unter Umordnung der Jordan-Blöcke.

   (a) $(x-1)^2(x+2)^2$,

   (b) $(x-1)^3(x+2)$.

5. Sei B eine komplexe 5×5-Matrix mit dem Minimalpolynom $(X-3)(X+5)^2$ und dem charakteristischem Polynom $(X-3)^2(X+5)^3$. Bestimme die möglichen Jordanschen Normalformen von B.

6. Ein Endomorphismus der Form $\mathrm{id}_V + n$ für einen nilpotenten Endomorphismus n heisst *unipotent*. Analog für quadratische Matrizen. Sei $\mathbb{Q} \subset K$. Zeige:

   (a) Für jeden nilpotenten Endomorphismus n ist
   $$\exp(n) := \sum_{m \geqslant 0}{}' \frac{n^m}{m!}$$
   wohldefiniert und unipotent.

   (b) Für jeden unipotenten Endomorphismus u ist
   $$\log(u) := \sum_{k \geqslant 1}{}' (-1)^{k-1} \frac{(u - \mathrm{id}_V)^k}{k}$$
   wohldefiniert und nilpotent.

   (c) Für jeden nilpotenten Endomorphismus n gilt $\log(\exp(n)) = n$.

   (d) Für jeden unipotenten Endomorphismus u gilt $\exp(\log(u)) = u$.

7. Beweise den Satz von Cayley-Hamilton für algebraisch abgeschlossene Körper K unter Benutzung der Jordanschen Normalform.

*8. Die fünf reellen Zahlen v, w, x, y, s erfüllen folgendes Gleichungssystem:

$$v = wx + ys, \tag{1}$$
$$v^2 = w^2x + y^2s, \tag{2}$$
$$v^3 = w^3x + y^3s. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass wenigstens zwei der Zahlen gleich sind.