Musterlösung Serie 18

Jordansche Normalenform

Durchgehend auf diesem Übungsblatt wird angenommen, dass K ein algebraisch abgeschlossener Körper ist. Ausserdem werden die Begriffe "Hauptraum" und "verallgemeinerter Eigenraum" synonym verwendet.

1. Bestimme die Jordansche Normalenform und eine zugehörige Basiswechselmatrix der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & & & \\ & 7 & 2 & & \\ & & 7 & 3 & \\ & & & 7 & 4 \\ & & & & 7 \end{pmatrix} \in M_{5\times 5}(\mathbb{C}).$$

   Lösung: Die Matrix A hat eine einzige Eigenwert $\lambda = 7$. Wir berechnen zuerst
$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Eig}_A(\lambda) &= \dim\ker(A - \lambda \cdot I_5) \\ &= \dim\ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & 0 & 3 & \\ & & & 0 & 4 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \\ &= 1. \end{aligned}$$

   Also hat die Jordansche Normalenform von A nur einen Block zum Eigenwert λ und sonst nichts. Folglich ist A ähnlich zu ihrer Normalenform
$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & & & \\ & 7 & 1 & & \\ & & 7 & 1 & \\ & & & 7 & 1 \\ & & & & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Bestimme die Jordansche Normalenform und eine zugehörige Basiswechselmatrix der komplexen Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Das charakteristische Polynom der Matrix A ist

$$\mathrm{char}_A(X) \;=\; X^4 - 11X^3 + 45X^2 - 81X + 54 \;=\; (X-2)\cdot(X-3)^3\,.$$

Wir betrachten die Eigenwerte 2 und 3 separat.

Eigenwert 2: Der Raum $\widetilde{\mathrm{Eig}}_A(2)$ ist eindimensional und gleich dem Eigenraum von A zum Eigenwert 2. Wir berechnen $\mathrm{Kern}(L_{A-2I_4})$ und finden den zugehörigen Eigenvektor

$$v_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Eigenwert 3: Für $B := A - 3I_4$ gilt

$$B = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B^2 = \begin{pmatrix}1 & -2 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = -B^3.$$

Dies impliziert

k	1	2	3	4	$\cdots$
$\mathrm{rank}(B^k)$	2	1	1	1	$\cdots$
$\dim \mathrm{Kern}(L_{B^k})$	2	3	3	3	$\cdots$
# $k \times k$-Jordanblöcke zum EW 3	1	1	0	0	$\cdots$

Sodann rechnen wir

$$\widetilde{\mathrm{Eig}}_A(3) \;=\; \mathrm{Kern}(L_{B^3}) \;=\; \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle .$$

Dann suchen wir einen Vektor $v_2 \in \widetilde{\mathrm{Eig}}_A(3)$, dessen Bild unter L_B ungleich Null ist. Zum Beispiel tut es

$$v_2 := \begin{pmatrix}-6\\0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad Bv_2 = \begin{pmatrix}8\\2\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Diesen ergänzen wir um einen beliebigen Vektor $v_3 \in \mathrm{Kern}(L_B) \setminus \langle Bv_2 \rangle$, zum Beispiel

$$v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann bildet v_2, Bv_2, v_3 eine Basis von $\widetilde{\mathrm{Eig}}_A(3)$.

Zusammenführung: Nach der Hauptraumzerlegung ist $b := (v_1, Bv_2, v_2, v_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$. Nach Konstruktion gilt für diese $Av_1 = 2v_1$ und $A(Bv_2) = 3(Bv_2)$ und $Av_2 = Bv_2 + 3v_2$ sowie $Av_3 = 3v_3$. Für die Basiswechselmatrix

$$S \ := \ (v_1 \mid v_3 \mid Bv_2 \mid v_2) \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt also

$$S^{-1}AS \ = \ \left(\begin{array}{c|c|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Dies ist die Jordansche Normalform von A.

3. Sei N eine komplexe 3×3 nilpotente Matrix.

   (a) Zeige, dass $A = I_3 + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$ die Gleichung $A^2 = I + N$ erfüllt. Wir sagen, dass A eine Quadratwurzel von $I + N$ ist.

   (b) Verwende (a), um zu zeigen, dass wenn $\lambda \neq 0$ ist, dann $\lambda I_3 + N$ eine Quadratwurzel hat.

   (c) Sei B eine invertierbare 3×3 Matrix. Zeige, dass B eine Quadratwurzel hat.

   Hinweis. Verwenden Sie Argumente ähnlich denen, die Sie in (a) und (b) verwendet haben, um eine allgemeine Formel für die Quadratwurzel von $\mu I_2 + \widetilde{N}$ zu finden, wobei $\widetilde{N}$ eine 2×2 komplexe nilpotente Matrix ist und μ eine nicht-null komplexe Zahl ist.

   Lösung:

   (a) Beachten Sie, dass N als nilpotent (d.h., $N^k = 0$ für ein k) nur Null-Eigenwerte hat, sodass sein charakteristisches Polynom $\mathrm{char}_N(t) = -t^3$ ist; nach dem Satz von Cayley-Hamilton schließen wir, dass $N^3 = 0$ (also $k \leqslant 3$) ist. Wir haben dann

$$\begin{aligned}A^2 &= \left(I + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2\right)\left(I + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2\right)\\ &= I + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)N + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{8}\right)N^2\\ &= I + N\end{aligned}$$

wo wir N^3 und höherpotenzierte Terme ignoriert haben, da sie Null sind.

(b) Sei $B = \lambda I + N = \lambda\left(I + \lambda^{-1}N\right)$. Da $\lambda^{-1}N$ auch nilpotent ist, ist eine Quadratwurzel für $(I + \lambda^{-1}N)$ aus (a) $A = I + \frac{\lambda^{-1}}{2} - \frac{\lambda^{-2}}{8}N^2$. Somit erfüllt $C = \lambda^{1/2}A$ die Gleichung

$$C^2 = \lambda A^2 = \lambda\left(I + \lambda^{-1}N\right) = B.$$

(c) Sei J die Jordansche Normalform von B, d.h., $B = QJQ^{-1}$. Aus (b) wissen wir, dass jeder Jordan-Block in J eine Quadratwurzel hat, da alle Eigenwerte von B ungleich null sind. Wenn J einen einzigen Jordan-Block enthält, sind wir mit (a) und (b) fertig.

Jeder Jordan-Block J_λ der Größe 1 hat eine Quadratwurzel. Tatsächlich ist $\sqrt{\lambda}$ eine Quadratwurzel für diesen Block.

Wir zeigen nun, dass jeder Jordan-Block J_λ der Größe 2 mit $\lambda \neq 0$ eine Quadratwurzel hat. Sei $\widetilde{N}$ eine nilpotente 2×2 Matrix. Dann ist, ähnlich wie in (a), das charakteristische Polynom $\operatorname{char}_{\widetilde{N}}(t) = t^2$. Daher ist $\widetilde{N}^2 = 0$. Durch Ausprobieren finden wir schnell, dass

$$A = I + \frac{1}{2}\widetilde{N}$$

eine Quadratwurzel von $I + \widetilde{N}$ ist. Dann zeigen wir, ähnlich wie bei (b), dass für jedes nicht verschwindende $\lambda \in \mathbb{C}$ die Matrix

$$C = \lambda^{\frac{1}{2}}\left(I + \frac{1}{2}\lambda^{-1}\widetilde{N}\right)$$

eine Quadratwurzel von $\lambda I_2 + \widetilde{N}$ ist.

Dies deckt alle möglichen Arten von Blöcken ab, die in der JNF einer invertierbaren 3×3 Matrix auftreten können. Beachten Sie zusätzlich, dass jede Kombination dieser Quadratwurzeln als diagonale Blöcke einer 3×3 Matrix angeordnet werden kann. Somit können wir diese Quadratwurzeln kombinieren, um eine Quadratwurzel L für J zu erhalten. Definieren wir $D = QLQ^{-1}$. Dann gilt

$$D^2 = QL^2Q^{-1} = QJQ^{-1} = B.$$

4. Angenommen, eine Matrix $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{C})$ hat das folgende charakteristische Polynom. Finde alle möglichen JNFs (Jordan Normalformen) von A unter Umordnung der Jordan-Blöcke.

   (a) $(x-1)^2(x+2)^2$,

   (b) $(x-1)^3(x+2)$.

   Lösung:

   (a) Die Jordan-Normalform muss Diagonaleinträge haben, die aus zwei 1'en und zwei -2'en bestehen. Die einzige Wahl besteht darin, ob für jede Eigenwerteinheit ein einzelner Jordan-Block der Größe 2 oder zwei Blöcke der Größe 1 vorhanden sind. Es gibt also vier Möglichkeiten:

$$
\begin{aligned}
&J_1^{(1)} \oplus J_1^{(1)} \oplus J_{-2}^{(1)} \oplus J_{-2}^{(1)},\\
&J_1^{(2)} \oplus J_{-2}^{(1)} \oplus J_{-2}^{(1)},\\
&J_1^{(1)} \oplus J_1^{(1)} \oplus J_{-2}^{(2)},\\
&J_1^{(2)} \oplus J_{-2}^{(2)}.
\end{aligned}
$$

   Diese können auch explizit als Matrizen geschrieben werden:

$$
\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix},
$$
$$
\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix},
$$
$$
\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix},
$$
$$
\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}.
$$

   Es ist ebenso korrekt, die Jordan-Blöcke in einer anderen Reihenfolge geschrieben zu haben.

(b) Die Jordan-Normalform muss Diagonaleinträge haben, die aus zwei 1'en und zwei -2'en bestehen. Es gibt also vier Möglichkeiten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. Sei B eine komplexe 5×5-Matrix mit dem Minimalpolynom $(X-3)(X+5)^2$ und dem charakteristischem Polynom $(X-3)^2(X+5)^3$. Bestimme die möglichen Jordanschen Normalformen von B.

   Lösung:

   Da B das charakteristische Polynom $(X-3)^2(X+5)^3$ besitzt, hat der Eigenwert 3 algebraische Vielfachheit 2 und der Eigenwert -5 algebraische Vielfachheit 3.

   Der Faktor $(X-3)$ tritt im Minimalpolynom mit der Potenz 1 auf; der grösste Jordan-Block zum Eigenwert 3 ist also ein 1×1-Block. Daher enthält die Jordan-Normalform genau 2 Jordanblöcke der Grösse 1×1 zum Eigenwert 3.

   Der Faktor $(X+5)$ tritt im Minimalpolynom mit der Potenz 2 auf; es existiert also ein Jordanblock zum Eigenwert -5 der Grösse 2×2. Aus Dimensionsgründen folgt, dass es genau einen weiteren Jordanblock der Grösse 1×1 gibt.

   Für die Jordansche Normalform der Matrix B erhalten wir also bis auf Vertauschen der Jordanblöcke als einzige Möglichkeit

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

6. Ein Endomorphismus der Form $\mathrm{id}_V + n$ für einen nilpotenten Endomorphismus n heisst *unipotent*. Analog für quadratische Matrizen. Sei $\mathbb{Q} \subset K$. Zeige:

   (a) Für jeden nilpotenten Endomorphismus n ist

$$\exp(n) := \sum_{m \geqslant 0}{}' \frac{n^m}{m!}$$

wohldefiniert und unipotent.

(b) Für jeden unipotenten Endomorphismus u ist

$$\log(u) := \sum_{k\geqslant 1}{}' (-1)^{k-1}\frac{(u-\mathrm{id}_V)^k}{k}$$

wohldefiniert und nilpotent.

(c) Für jeden nilpotenten Endomorphismus n gilt $\log(\exp(n)) = n$.

(d) Für jeden unipotenten Endomorphismus u gilt $\exp(\log(u)) = u$.

Lösung:

(a) Nach Voraussetzung existiert ein $p \geqslant 1$ mit $n^p = 0$. Dann gilt auch $n^m = 0$ für alle $m \geqslant p$. Somit ist die Summe in der Definition von $\exp(n)$ endlich. Der Ausdruck ist also wohldefiniert. Weiter ist

$$\exp(n) - \mathrm{id}_V = \sum_{m=1}^{p-1} \frac{n^m}{m!}\,.$$

Da die Endomorphismen $n^m/m!$ für alle $1 \leqslant m \leqslant p$ nilpotent sind und miteinander kommutieren, folgt aus Aufgabe **??** und einem Induktionsargument, dass auch $\exp(n) - \mathrm{id}_V$ nilpotent ist. Der Endomorphismus $\exp(n)$ ist also unipotent.

(b) Nach Voraussetzung ist die Abbildung $n := u - \mathrm{id}_V$ nilpotent. Damit ist die Summe in der Definition von $\log(u)$ endlich und folglich wohldefiniert. Sei $p \geqslant 1$ mit $n^p = 0$, also $n^m = 0$ für alle $m \geqslant p$. Dann ist $\log(u) = \sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k-1}n^k/k$ eine endliche Summe von miteinander kommutierenden nilpotenten Matrizen, also wie in Teil (a) wieder nilpotent.

(d) Sei u ein beliebiger unipotenter Endomorphismus und sei $n := u - \mathrm{id}_V$ der zugehörige nilpotente Endomorphismus. Sei $p \geqslant 1$ mit $n^p = 0$ und $(\log(\mathrm{id}_V + n))^p = 0$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x) = \sum_{m\geqslant 0} \frac{x^m}{m!}$$

und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt

$$\log(1+x) = \sum_{k\geqslant 1} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\,.$$

Somit ist für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$

$$\begin{aligned} 1 + x &= \exp(\log(1+x)) \\ &= \sum_{m\geqslant 0} \frac{1}{m!}\left(\sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\right)^m\,. \end{aligned}$$

Definiere das Polynom

$$p(X) := \sum_{0 \leqslant m < p} \frac{1}{m!} \left(\sum_{1 \leqslant k < p} (-1)^{k-1} \frac{X^k}{k} \right)^m .$$

Für alle $k < p$ stimmt der Koeffizient von X^k mit dem Koeffizienten von X^k in der Taylorreihe von $\exp(\log(1+x))$ überein. Aus (**??**) und dem Identitätssatz für Potenzreihen folgt also

$$p(X) = 1 + X + X^p q(X)$$

für ein Polynom $q(X)$. Wir schliessen

$$\begin{aligned}
\exp(\log(\mathrm{id}_V + n)) &= \sum_{0 \leqslant m < p} \frac{1}{m!} \log(1+n)^m \\
&= \sum_{0 \leqslant m < p} \frac{1}{m!} \left(\sum_{1 \leqslant k < p} (-1)^{k-1} \frac{n^k}{k} \right)^m \\
&= p(n) \\
&= 1 + n + n^p q(n) \\
&= 1 + n .
\end{aligned}$$

(c) Die Aussage $\log(\exp(n)) = n$ für alle nilpotenten Endomorphismen n folgt mit dem analogen Argument aus der Entwicklung von $\log(\exp(x))$ im Bereich $|\exp(x) - 1| < 1$.

7. Beweise den Satz von Cayley-Hamilton für algebraisch abgeschlossene Körper K unter Benutzung der Jordanschen Normalform.

   Lösung: Durch Wählen einer Basis genügt es zu zeigen, dass für jede quadratische Matrix $A \in M_{n\times}(K)$ die Gleichung

$$\chi_A(A) = 0 \tag{1}$$

   gilt. Das charakteristische Polynom ähnlicher Matrizen ist gleich, und die Gleichung (1) ist ebenfalls invariant unter Ersetzung von A durch eine ähnliche Matrix. Somit genügt es, den Satz für Matrizen in Jordanscher Normalform zu beweisen.

   Sei nun also A in Jordannormalform. Dann ist A insbesondere in Blockdiagonalform mit Jordanblöcken $J_1, \ldots J_k$ auf der Diagonalen. Das charakteristische Polynom von A ist das Produkt der charakteristischen Polynome der Jordanblöcken, somit genügt es zu zeigen, dass ein Jordanblock J_i Nulstelle seinenes charakteristischen Polynoms ist.

   Nun betrachten wir einen einzelnen Jordanblock J_i der Größe m mit Eigenwert λ_i. Das charakteristische Polynom ist $\chi_{J_i} i(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^m$. Für N mit 1 auf der ersten Oberdiagonale ist $J_i = \lambda_i 1_{m\times m} + N$. Beachte, dass $N^m = 1$ ist. Also gilt tatsächlich $\chi_{J_i} i(\lambda) = N^m = 0$.

*8. Die fünf reellen Zahlen v, w, x, y, s erfüllen folgendes Gleichungssystem:

$$v = wx + ys, \tag{2}$$
$$v^2 = w^2x + y^2s, \tag{3}$$
$$v^3 = w^3x + y^3s. \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass wenigstens zwei der Zahlen gleich sind.

Lösung: Angenommen, es gelte $wyv \neq 0$ (im Fall, dass einer der Werte 0 ist, erfolgt eine einfache Fallunterscheidung). Das gegebene Gleichungssystem ist äquivalent zu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} w & y & v \\ w^2 & y^2 & v^2 \\ w^3 & y^3 & v^3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ s \\ -1 \end{pmatrix}}_{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Beachte, dass $u \in \ker(A)$, aber $u \neq 0_{R^3}$, weshalb A nicht invertierbar ist. Somit folgt $\det(A) = 0$. Da A im Wesentlichen eine Vandermonde-Matrix ist, erhält man

$$0 = \det(A) = wyv \cdot (v - y)(v - w)(y - w), \tag{6}$$

woraus die Aussage resultiert.

Hinweis: Diese Aufgabe war Teil des deutschen Bundeswettbewerb für Mathematik, siehe:
https://bundeswettbewerb-mathematik.de/Bundesrunde 2024/1.