Serie 19

Normierte Räume und Räume mit einem inneren Produkt

Durchgehend auf diesem Übungsblatt wird angenommen, dass K ein algebraisch abgeschlossener Körper ist. Ausserdem werden die Begriffe "Hauptraum" und "verallgemeinerter Eigenraum" synonym verwendet.

1. Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist für $x = \binom{x_1}{x_2}$ und $y = \binom{y_1}{y_2}$ durch

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + a x_1 y_2 + a x_2 y_1 + 7 x_2 y_2$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert?

2. Sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leqslant n$.

   (a) Zeige, dass durch
   $$\langle p, q \rangle := \int_0^\infty p(t) q(t) e^{-t} \, dt$$
   ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

   (b) Bestimme die Matrix des obiges Skalarprodukts bezüglich der Basis $1, x, \ldots, x^n$ (siehe die Definition unten).

Definition. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein n-dimensionaler Vektorraum mit innerem Produkt. Die Matrix dieses inneren Produkts bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ist die Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ mit $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$. Beachten Sie, dass bezüglich dieser Basis für beliebige Koordinatenvektoren $u, v \in V$ gilt:

$$\langle u, v \rangle = u^T A v.$$

3. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein endlichdimensionaler normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Nehme an, dass $T \in \mathrm{Hom}(V)$ ist, so dass
$$\forall v \in V: \ \|Tv\| \leqslant \|v\|$$
gilt. Zeige, dass $T - \sqrt{2} I$ invertierbar ist.

4. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit inneres produkt. Angenommen, $u, v \in V$. Beweisen Sie, dass $\langle u, v \rangle = 0$ genau dann gilt, wenn

$$\|u\| \leqslant \|u + av\|$$

für alle $a \in \mathbb{K}$ ist.

5. (a) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Zeige, dass die Norm genau dann von einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V induziert wird, wenn sie für alle $x, y \in V$ die *Parallelogrammidentität*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

erfüllt.

(b) Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Betrachte die folgende Abbildung:

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|_1 : & V & \to & \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\ & v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^n |v_i| \end{array}$$

Zeige, dass $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf V definiert, und beweise, dass sie nicht von einem Skalarprodukt herrührt.

6. Sei $K = \mathbb{R}$, $V = M_{n\times n}(K)$ und betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rcc} V \times V & \to & K \\ (A, B) & \mapsto & \operatorname{Tr}(A^T B). \end{array}$$

Zeige, dass sie ein Skalarprodukt auf V definiert und finde eine orthonormale Basis bezüglich dieses Skalarprodukts. Die induzierte Norm wird als *Hilbert-Schmidt-Norm* bezeichnet. Gib eine Formel für die Norm einer Matrix $A \in V$ in Bezug auf ihre Einträge an.

7. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Definiere

$$B := \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass B genau dann positiv definit ist, wenn $\det(B) > 0$ und $a > 0$.