Musterlösung Serie 19

Normierte Räume und Räume mit einem inneren Produkt

Durchgehend auf diesem Übungsblatt wird angenommen, dass K ein algebraisch abgeschlossener Körper ist. Ausserdem werden die Begriffe "Hauptraum" und "verallgemeinerter Eigenraum" synonym verwendet.

1. Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist für $x = \binom{x_1}{x_2}$ und $y = \binom{y_1}{y_2}$ durch

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + ax_1y_2 + ax_2y_1 + 7x_2y_2$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert?

Lösung: Man prüft direkt, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$ ist. Sodann berechnen wir:

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= x_1^2 + 2ax_1x_2 + 7x_2^2\\ &= x_1^2 + 2ax_1x_2 + a^2x_2^2 - a^2x_2^2 + 7x_2^2\\ &= (x_1 + ax_2)^2 + (7 - a^2)x_2^2.\end{aligned}$$

Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit, so folgt mit $x = \binom{-a}{1} \neq 0$, dass $7 - a^2 > 0$ sein muss; also $|a| < \sqrt{7}$. Ist umgekehrt $|a| < \sqrt{7}$, so gilt wegen der obigen Rechnung $\langle x, x\rangle > 0$ für alle $x \neq 0$ und daher ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit. Somit ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist genau dann, wenn $|a| < \sqrt{7}$ gilt.

2. Sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leqslant n$.

   (a) Zeige, dass durch
   $$\langle p, q\rangle := \int_0^\infty p(t)q(t)e^{-t}\, dt$$
   ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

   (b) Bestimme die Matrix des obiges Skalarprodukts bezüglich der Basis $1, x, \ldots, x^n$ (siehe die Definition unten).

Definition. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein n-dimensionaler Vektorraum mit innerem Produkt. Die Matrix dieses inneren Produkts bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ist die Matrix $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ mit $a_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$. Beachten Sie, dass bezüglich dieser Basis für beliebige Koordinatenvektoren $u, v \in V$ gilt:

$$\langle u, v\rangle = u^T Av.$$

Lösung:

(a) Zunächst wissen wir aus der Analysis, dass das uneigentliche Integral konvergiert. Sodann zeigt man direkt aus den Linearitätseigenschaften des Integrals, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine Bilinearform ist. Offensichtlich ist sie symmetrisch. Sei nun $p \in V \setminus \{0\}$ beliebig. Wähle einen Punkt $x_0 > 0$ mit $p(x_0) \neq 0$. Da p eine stetige Funktion induziert, gilt dann $|p(x)| \geqslant c := \frac{1}{2}|p(x_0)| > 0$ auf einem ganzen Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ mit $x_0 \in [a,b]$. Da die Funktion $t \mapsto e^{-t}$ streng monoton fallend und $e^{-t} > 0$ für alle t ist, folgt

$$\langle p,p\rangle \;=\; \int_0^\infty p(t)^2 e^{-t}\,dt \;\geqslant\; \int_a^b p(t)^2 e^{-t}\,dt \;\geqslant\; c\cdot e^{-b}\cdot(b-a) \;>\; 0.$$

Damit ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit und daher ein Skalarprodukt.

(b) Für alle $k \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ sei

$$a(k) := \int_0^\infty t^k e^{-t}\,dt.$$

Dann ist

$$a(0) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1,$$

und für $k \geqslant 1$ gilt nach partieller Integration

$$a(k) = \int_0^\infty t^k e^{-t}\,dt = -t^k e^{-t}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty kt^{k-1}(-e^{-t})\,dt = k\cdot a(k-1).$$

Durch Induktion über k folgt daraus $a(k) = k!$. Sei schliesslich $A := (a_{ij})_{i,j}$ die Darstellungsmatrix des Skalarproduktes $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezüglich der geordneten Basis $(1, x, \ldots, x^n)$. Dann ist

$$a_{ij} = \langle x^{i-1}, x^{j-1}\rangle = a(i+j-2) = (i+j-2)!\,.$$

3. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein endlichdimensionaler normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Nehme an, dass $T \in \mathrm{Hom}(V)$ ist, so dass

$$\forall v \in V:\ \|Tv\| \leqslant \|v\|$$

gilt. Zeige, dass $T - \sqrt{2}I$ invertierbar ist.

Lösung: Da V endlich-dimensional ist, müssen wir nur zeigen, dass $T-\sqrt{2}I$ injektiv ist. Nehmen wir an, dass es einen Widerspruch gibt, dass $0 \neq u \in \ker(T-\sqrt{2}I)$ existiert. Dann gilt

$$Tu = \sqrt{2}u \quad\Longrightarrow\quad \|Tu\| = \sqrt{2}\,\|u\| > \|u\|\,.$$

Hier haben wir verwendet, dass $\|u\| = 0$ genau dann, wenn $u = 0$. Dies steht im Widerspruch zu unserer Annahme und beendet daher den Beweis.

4. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit inneres produkt. Angenommen, $u, v \in V$. Beweisen Sie, dass $\langle u, v\rangle = 0$ genau dann gilt, wenn

$$\|u\| \leqslant \|u + av\|$$

für alle $a \in \mathbb{K}$ ist.

Lösung: Angenommen, $\langle u, v\rangle = 0$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\|u + av\|^2 &= \langle u + av, u + av\rangle \\
&= \langle u, u\rangle + \langle u, av\rangle + \langle av, u\rangle + \langle av, av\rangle \\
&= \|u\|^2 + |a|^2 \|v\|^2 + \overline{a}\langle u, v\rangle + a\overline{\langle u, v\rangle} \\
&= \|u\|^2 + |a|^2 \|v\|^2 \geqslant \|u\|^2 .
\end{aligned}$$

Beachten Sie, dass die obige Ketten von Gleichheiten im Wesentlichen dem Satz des Pythagoras entsprechen.

Nehmen Sie nun an, dass $\|u\| \leqslant \|u + av\|$ für alle $a \in \mathbb{K}$. Dann haben wir

$$0 \leqslant \|u + av\|^2 - \|u\|^2 = |a|^2 \|v\|^2 + a\langle v, u\rangle + \overline{a}\langle u, v\rangle.$$

Wenn $v = 0$ ist, folgt $\langle u, v\rangle = 0$ aus den Axiomen. Wenn $v \neq 0$ ist, setzen Sie $a = -\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$ in die vorherige Gleichung ein. Es ergibt sich

$$0 \leqslant -\frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2}.$$

Jetzt kann dies nur gelten, wenn $\langle u, v\rangle = 0$ ist.

5. (a) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Zeige, dass die Norm genau dann von einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V induziert wird, wenn sie für alle $x, y \in V$ die *Parallelogrammidentität*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

erfüllt.

(b) Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Betrachte die folgende Abbildung:

$$\begin{array}{rccc}
\|\cdot\|_1 : & V & \to & \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\
& v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^n |v_i|
\end{array}$$

Zeige, dass $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf V definiert, und beweise, dass sie nicht von einem Skalarprodukt herrührt.

Lösung:

(a) Im Fall $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ gilt

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\ \|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2, \end{aligned}$$

also ist

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

Sei umgekehrt $\|\cdot\|$ eine Norm auf V, welche die Parallelogrammidentität erfüllt. Definiere

$$\langle x,y\rangle := \frac{1}{2}\big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big) = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big),$$

wobei die letzte Gleichung aus der Parallelogrammidentität (PI) folgt. Diese Abbildung erfüllt $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ und $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle$ für alle $x,y \in V$. Da $\|\cdot\|$ bereits positiv definit ist, bleibt also nur noch zu zeigen, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bilinear ist. Aufgrund der Symmetrie genügt es zu zeigen, dass die Abbildung linear in der ersten Variablen ist.

Für beliebige $x, x', y \in V$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \langle x+x', y\rangle &= \frac{1}{4}(\|(x+y)+x'\|^2 - \|x+x'-y\|^2) \\ &\overset{\text{(PI)}}{=} \frac{1}{4}(2\|x+y\|^2 + 2\|x'\|^2 - \|x+y-x'\|^2 - \|x+x'-y\|^2) \\ &\overset{\text{(PI)}}{=} \frac{1}{4}(2\|x+y\|^2 + 2\|x'\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|x'-y\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(2\|x+y\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|x'\|^2 + 4\|x'\|^2 - 2\|x'-y\|^2) \\ &\overset{\text{(PI)}}{=} \frac{1}{4}(2\|x+y\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|x'\|^2 + 2\|x'+y\|^2 - 4\|y\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 + \|x'+y\|^2 - \|x'\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \langle x,y\rangle + \langle x',y\rangle. \end{aligned}$$

Also ist die Abbildung additiv in der ersten Variablen. Das Verhalten unter skalarer Multiplikation können wir nur indirekt erschliessen. Zunächst zeigen wir die folgenden Aussagen für alle $n \in \mathbb{Z}^{>0}$ und alle $x, y \in V$:

(i) Wegen
$$0 = \langle 0, y\rangle = \langle x + (-x), y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle -x, y\rangle$$
gilt $\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$.

(ii) Aus der Additivität folgt durch Induktion $\langle nx, y\rangle = n\langle x, y\rangle$.

(iii) Aus (ii) mit $\frac{1}{n}x$ anstelle von x folgt
$$\langle x, y\rangle = \langle n\frac{1}{n}x, y\rangle = n\langle \frac{1}{n}x, y\rangle,$$
und daher $\langle \frac{1}{n}x, y\rangle = \frac{1}{n}\langle x, y\rangle$.

Aus allen drei Aussagen zusammen folgt nun
$$\langle \frac{p}{q} \cdot x, y\rangle = \frac{p}{q} \cdot \langle x, y\rangle$$
für alle $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ und alle $x, y \in V$.
Nun fixieren wir beliebige $x, y \in V$. Der von diesen erzeugte Unterraum U ist dann isomorph zu $\mathbb{R}^n$ für ein $n \leqslant 2$. Die Einschränkung von $\|\cdot\|$ auf U ist wieder eine Norm und entspricht daher einer Norm auf $\mathbb{R}^n$. Wie durch die Dreiecksungleichung bewiesen werden kann, ist die Norm eine stetige Funktion von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$. Daraus folgt, dass der obige Ausdruck, der das Produkt definiert, eine stetige Funktion von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ ist. Dies impliziert wiederum, dass die Funktion
$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \langle tx, y\rangle - t\langle x, y\rangle$$
stetig ist. Nun zeigt aber die obige Gleichung, dass diese Funktion auf $\mathbb{Q}$ verschwindet. Da sie stetig ist, verschwindet sie daher auf ganz $\mathbb{R}$. Es gilt also
$$\langle tx, y\rangle = t\langle x, y\rangle$$
für alle $t \in \mathbb{R}$. Also ist $\langle \cdot, \cdot\rangle$ linear in der ersten Variable, und wir sind fertig.

(b) Da alle $|v_i| \geqslant 0$ sind, gilt $\sum_{i=1}^n |v_i| = 0$ genau dann, wenn jeder einzelne Summand $|v_i| = 0$ ist. Und $|v_i| = 0 \Leftrightarrow v_i = 0$ für alle i. Seien nun $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$. Dann:
$$\begin{aligned}
\|\lambda v\|_1 &= \sum_{i=1}^n |\lambda v_i| && (1)\\
&= \sum_{i=1}^n |\lambda| \cdot |v_i| && (2)\\
&= |\lambda| \cdot \sum_{i=1}^n |v_i| && (3)\\
&= |\lambda| \cdot \|v\|_1 && (4)
\end{aligned}$$

Seien $v = (v_1, ..., v_n)$ und $w = (w_1, ..., w_n)$ in V. Dann:

$$\begin{aligned} \|v + w\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |v_i + w_i| && (5)\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} (|v_i| + |w_i|) \quad \text{(wegen der Dreiecksungleichung in } \mathbb{R}) && (6)\\ &= \sum_{i=1}^{n} |v_i| + \sum_{i=1}^{n} |w_i| && (7)\\ &= \|v\|_1 + \|w\|_1 && (8) \end{aligned}$$

Somit ist $\|.\|_1$ eine Norm.

Um zu zeigen, dass $\|\cdot\|_1$ nicht durch ein Skalarprodukt induziert wird, genügt es ein Paar von Vektoren zu finden, für welches $\|\cdot\|_1$ nicht die Parallelogrammgleichung erfüllt. Seien $x = (1, 0, 0, \dots, 0)^T$, $y = (0, 1, 0, \dots, 0)^T$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|x + y\|_1^2 &= (1 + 1)^2 = 4\\ \|x - y\|_1^2 &= (1 + 1)^2 = 4\\ 2\,\|x\|_1^2 &= 2\\ 2\,\|y\|_1^2 &= 2. \end{aligned}$$

Also ist die Parallelogrammgleichung verletzt.

6. Sei $K = \mathbb{R}$, $V = M_{n\times n}(K)$ und betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & K\\ (A, B) & \mapsto & \mathrm{Tr}(A^T B). \end{array}$$

Zeige, dass sie ein Skalarprodukt auf V definiert und finde eine orthonormale Basis bezüglich dieses Skalarprodukts. Die induzierte Norm wird als *Hilbert-Schmidt-Norm* bezeichnet. Gib eine Formel für die Norm einer Matrix $A \in V$ in Bezug auf ihre Einträge an.

Lösung: Die Grundregeln der Matrixmultiplikation implizieren, dass die Abbildung $(A, B) \mapsto A^T B$ bilinear ist. Da die Spurabbildung linear ist, ist die angegebene Abbildung also bilinear. Wegen

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B) = \mathrm{Tr}((A^T B)^T) = \mathrm{Tr}(B^T (A^T)^T) = \mathrm{Tr}(B^T A) = \langle B, A\rangle$$

ist sie ausserdem symmetrisch. Sodann schreiben wir $A = (v_1, \dots, v_n)$ mit Spaltenvektoren v_i. Dann ist A^T die Matrix mit den Zeilen $v_1^T, \dots, v_n^T$ und folglich

$$A^T A \;=\; \left(v_i^T v_j\right)_{i,j=1,..,n}.$$

Die Spur ist definiert als die Summe der Diagonaleinträge; darum gilt also

$$\langle A, A\rangle \;=\; \mathrm{Tr}(A^T A) \;=\; \sum_{i=1}^{n} v_i^T v_i.$$

Hier ist jeder Summand $v_i^T v_i$ das Betragsquadrat von v_i bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$ und folglich $\geqslant 0$. Also ist $\langle A, A\rangle \geqslant 0$. Für $A \neq 0$ ist ausserdem mindestens ein $v_i \neq 0$, also mindestens ein Summand > 0 und daher $\langle A, A\rangle > 0$. Somit ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt.

Offenbar ist die Menge aller Matrizen

$$E_{k\ell} = (e_{pq}^{(k\ell)})_{1\leqslant p,q\leqslant n}, \quad e_{pq}^{(k\ell)} = \begin{cases} 0, & (p,q) \neq (k,\ell) \\ 1, & (p,q) = (k,\ell) \end{cases}$$

eine Basis von $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Durch direkte Rechnung verifizieren wir

$$\langle E_{ij}, E_{k\ell}\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) = (k,\ell), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

also ist dies eine Orthonormalbasis.

Aliter: Wir identifizieren $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$, indem wir die Koeffizienten einer Matrix in irgendeiner fest gewählten Reihenfolge auflisten. Dies ist ein Vektorraum-Isomorphismus. Für zwei $n \times n$-Matrizen $A = (a_{ij})_{i,j}$ und $B = (b_{ij})_{i,j}$ zeigt nun eine direkte Rechnung die Gleichung

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}.$$

Über den genannten Isomorphismus entspricht $\langle\cdot,\cdot\rangle$ also dem Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n^2}$; somit ist auch diese ein Skalarprodukt. Ausserdem entsprechen die $n \times n$-Elementarmatrizen genau den Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^{n^2}$; und da diese eine Orthonormalbasis für das Standardskalarprodukt bilden, gilt das Entsprechende für die $n \times n$-Elementarmatrizen.

Wir bezeichnen die induzierte Norm mit $\|\cdot\|$. Seien $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $A^T = (\tilde{a}_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ und $A^T A = (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Es gilt

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}.$$

Also ist $c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2$ und

$$\|A\|^2 = \mathrm{Tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2$$

ist einfach die euklidische Norm auf A gesehen als ein Element von $\mathbb{R}^{n^2}$.

7. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Definiere

$$B := \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass B genau dann positiv definit ist, wenn $\det(B) > 0$ und $a > 0$. *Lösung*: Eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist positiv definit genau dann, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$ gilt: $x^T Bx > 0$.

Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x^T Bx &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} && (9) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ bx_1 + dx_2 \end{pmatrix} && (10) \\ &= x_1(ax_1 + bx_2) + x_2(bx_1 + dx_2) && (11) \\ &= ax_1^2 + bx_1x_2 + bx_1x_2 + dx_2^2 && (12) \\ &= ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2 && (13) \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung: Wir zeigen, dass $\det(B) > 0$ und $a > 0$ hinreichend für positive Definitheit sind.

Angenommen, $\det(B) > 0$ und $a > 0$. Dann gilt $ad - b^2 > 0$, also $ad > b^2$.

Wir betrachten $x^T Bx = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2$ und versuchen, dies als Summe von Quadraten darzustellen.

Wir können schreiben:

$$\begin{aligned} ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2 &= a\left(x_1^2 + \frac{2b}{a}x_1x_2 + \frac{d}{a}x_2^2\right) && (14) \\ &= a\left(x_1^2 + \frac{2b}{a}x_1x_2 + \frac{b^2}{a^2}x_2^2 - \frac{b^2}{a^2}x_2^2 + \frac{d}{a}x_2^2\right) && (15) \\ &= a\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 + a\left(\frac{d}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right)x_2^2 && (16) \\ &= a\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 + \frac{ad - b^2}{a}x_2^2 && (17) \end{aligned}$$

Da $a > 0$ und $ad - b^2 > 0$ (also $\frac{ad-b^2}{a} > 0$), folgt, dass $x^T Bx > 0$ für alle $x \neq 0$. Somit ist B positiv definit.

Notwendige Bedingung: Wir zeigen, dass positive Definitheit von B impliziert, dass $\det(B) > 0$ und $a > 0$.

Angenommen, B ist positiv definit. Dann gilt $x^T Bx > 0$ für alle $x \neq 0$.

Für $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhalten wir $x^T B x = a > 0$.

Für $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhalten wir $x^T B x = d > 0$.

Wir wissen bereits, dass $a > 0$ und $d > 0$. Nun müssen wir zeigen, dass $\det(B) > 0$.

Sei $y = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$. Falls $y = 0$, dann ist $b = 0$ und somit $\det(B) = ad > 0$.

Falls $y \neq 0$, dann gilt nach Voraussetzung $y^T B y > 0$:

$$\begin{aligned}
y^T B y &= \begin{pmatrix} b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} && (18) \\
&= \begin{pmatrix} b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ab - ba \\ bb - da \end{pmatrix} && (19) \\
&= \begin{pmatrix} b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ bb - da \end{pmatrix} && (20) \\
&= b \cdot 0 - a \cdot (bb - da) && (21) \\
&= -abb + a^2 d && (22) \\
&= a(ad - b^2) && (23) \\
&= a \cdot \det(B) && (24)
\end{aligned}$$

Da $a > 0$ und $y^T B y > 0$, folgt $\det(B) > 0$.

Somit haben wir gezeigt, dass B genau dann positiv definit ist, wenn $\det(B) > 0$ und $a > 0$.