Lösungen 1

1. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$.

   (a) Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathbb{R}$ folgendes gilt:

   $$\alpha \mathcal{F}_{a,b} = \mathcal{F}_{\alpha a, \alpha b}.$$

   (b) Zeigen Sie, dasss es Skalare $x, y \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

   $$\mathcal{F}_{a,b} = x\mathcal{F}_{1,1} + y\mathcal{F}_{1,-1}.$$

   (c) Zeigen Sie, dass es Skalare $x, y \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

   $$\mathcal{F}_{a,b} = x\mathcal{F}_{1,\varphi} + y\mathcal{F}_{1,\psi}.$$

   (Mit anderen Worten, schreiben Sie $\mathcal{F}_{a,b}$ als eine Linearkombination der beiden Eigenfolgen von S.)

   (d) Finden Sie eine geschlossene Form für den $n$ten Wert der Fibonacci Folge $\mathcal{F}_{a,b}$.

Solution:

(a) Schreibe $\mathcal{F}_{a,b} = (a_0, a_1, \dots)$ und $\mathcal{F}_{\alpha a, \alpha b} = (b_0, b_1, \dots)$ und $\alpha\mathcal{F}_{a,b} = (c_0, c_1, \dots)$. Per Definition des Skalarproduktes gilt dann $c_0 = b_0$ und $c_1 = b_1$. Des Weiteren ist für $n \geqslant 2$

$$c_n = \alpha a_n = \alpha(a_{n-1} + a_{n-2}) = c_{n-1} + c_{n-2}.$$

Also haben $\mathcal{F}_{\alpha a, \alpha b}$ und $\alpha\mathcal{F}_{a,b}$ die gleichen ersten beiden Elemente, und genügen der gleichen Rekursion, welche alle weiteren Folgenglieder eindeutig bestimmt. Also sind sie gleich.

(b) Seien $x := \frac{a+b}{2}$ und $y := \frac{a-b}{2}$. Aus dem Beweis von Satz 1.1.9 der Vorlesung folgt

$$\begin{aligned}
x\mathcal{F}_{1,1} + y\mathcal{F}_{1,-1} &= \frac{a+b}{2}\mathcal{F}_{1,1} + \frac{a-b}{2}\mathcal{F}_{1,-1} \\
&= \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right)\mathcal{F}_{1,0} + \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right)\mathcal{F}_{0,1} \\
&= a\mathcal{F}_{1,0} + b\mathcal{F}_{0,1} = \mathcal{F}_{a,b}
\end{aligned}$$

(c) Per Definition ist die Fibonacci-Folge $\mathcal{F}_{1,\varphi} = (a_0, a_1, \dots)$ durch die Anfangswerte

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

bestimmt. Gleiches gilt für die Fibonacci-Folge $\mathcal{F}_{1,\psi} = (b_0, b_1, \dots)$ und die Anfangswerte

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Um $\mathcal{F}_{a,b} = (c_0, c_1, \dots)$ als Linearkombination der beiden obigen Folgen zu schreiben müssen wir also x und y so wählen, dass die beiden Gleichungen

$$a = c_0 = xa_0 + yb_0 = x + y$$

und

$$b = c_1 = xa_1 + yb_1 = x\frac{1+\sqrt{5}}{2} + y\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

erfüllt sind.
Geschicktes umschreiben des letzten Terms und ersetzen von $(x+y)$ durch a liefert also das Gleichungssystem

$$\begin{align} a &= x + y \tag{1} \\ b &= \frac{1}{2}(x+y) + \frac{\sqrt{5}}{2}(x-y) \Leftrightarrow \frac{2b-a}{\sqrt{5}} = x - y \tag{2} \end{align}$$

in den Unbekannten x und y. Wir rechnen weiter und erhalten

$$\begin{aligned} (1)+(2) \quad &\Leftrightarrow \quad a + \frac{2b-a}{\sqrt{5}} = 2x \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}a + \frac{1}{\sqrt{5}}b = x \\ (1)-(2) \quad &\Leftrightarrow \quad a - \frac{2b-a}{\sqrt{5}} = 2y \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}a - \frac{1}{\sqrt{5}}b = y. \end{aligned}$$

Somit sind

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-\psi a + b) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi a - b) \end{aligned}$$

Lösungen für das Gleichungssystem. Da die Fibonacci-Folge $\mathcal{F}_{a,b}$ durch ihre beiden ersten Glieder c_0 und c_1 eindeutig bestimmt ist folgt mit dieser Wahl von x und y, das

$$\mathcal{F}_{a,b} = x\mathcal{F}_{1,\varphi} + y\mathcal{F}_{1,\psi}$$

gilt.

(d) Für $n \geqslant 2$ ist der $n$te Term der Fibonacci-Folge $\mathcal{F}_{a,b}$ gegeben durch

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}.$$

Diese Form ist jedoch noch nicht geschlossen, da c_n von seinen Vorgängern c_{n-1} und c_{n-2} abhängt. Eine geschlossene Form darf nur von n, a und b abhängen.
Daher verwenden wir unser Wissen aus dem vorherigen Aufgabenteil sowie der Tatsache, dass $\mathcal{F}_{1,\varphi}$ und $\mathcal{F}_{1,\psi}$ Eigenfolgen für die Verschiebungs-Abbildung S, mit den Eigenwerten φ bezieungsweise ψ, sind. Aus der Vorlesung kennen wir die geschlossene Form

$$\mathcal{F}_{1,\varphi} = (1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, ...)$$
$$\mathcal{F}_{1,\psi} = (1, \psi, \psi^2, \psi^3, \psi^4, ...)$$

der beiden Eigenfolgen. Somit gilt für $n \geqslant 1$

$$c_n = x\varphi^n + y\psi^n = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\psi a + b)\varphi^n + \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi a - b)\psi^n$$

Da $\psi\varphi = -1$ gilt, folgt also

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a(\varphi^{n-1} - \psi^{n-1}) + b(\varphi^n - \psi^n)).$$

Beachte, dass diese Formel insbesondere auch für $n = 0$ stimmt.

2. Eine Folge $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ ist eine *Pell-Folge* wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ gibt so dass

$$c_0 = a, \quad c_1 = b, \quad c_n = 2c_{n-1} + c_{n-2};$$

wir nennen diese Folge $\mathcal{P}_{a,b}$. Es sei V die Menge aller Pell-Folgen.

(a) Es seien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ Pell-Folgen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ und $\alpha\mathcal{Q}$ ebenfalls Pell-Folgen sind.

(b) Es sei $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ eine Pell-Folge. Zeigen Sie, dass die Folge $(c_1, c_2, c_3, \dots)$ ebenfalls eine Pell-Folge ist.

(c) Es sei $S : V \to V$ der Verschiebungsoperator, der die Folge $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ auf $(c_1, c_2, c_3, \dots)$ abbildet. Bestimmen Sie die Eigenfolgen von S in V mit den dazugehoerigen Eigenwerten.

(d) Schreiben Sie $\mathcal{P}_{a,b}$ als eine Linearkombination der beiden Eigenfolgen.

(e) Finden Sie eine geschlossene Form fuer den $n$ten Wert von $\mathcal{P}_{a,b}$.

(f) ($\star$) Was geht schief, wenn wir statt dessen die Folgen $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ betrachten, die ueber die Rekursion

$$c_0 = a, \quad c_1 = b \quad c_n = 2c_{n-1} - c_{n-2}$$

definiert sind?

Die Frage ($\star$) ist eine schwierigere Zusatzfrage. Sie sollten sie nur dann in Angriff nehmen, wenn Sie die anderen Fragen geloest haben.

Solution:

(a) Seien $\mathcal{P} = (c_0, c_1, \dots)$ und $\mathcal{Q} = (d_0, d_1, \dots)$, dann gelten für

$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} = (e_0, e_1, \dots),$$

die Gleichungen

$$e_0 = c_0 + d_0, \quad e_1 = c_1 + d_1,$$

sowie

$$\begin{aligned} e_n = c_n + d_n &= (2c_{n-1} + c_{n-2}) + (2d_{n-1} + d_{n-2}) \\ &= 2(c_{n-1} + d_{n-1}) + (c_{n-2} + d_{n-2}) = 2e_{n-1} + e_{n-2}. \end{aligned}$$

Also ist auch $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ eine Pell-Folge.
Für $\alpha\mathcal{Q} = (f_0, f_1, \dots)$ gilt

$$\begin{aligned} &f_0 = \alpha d_0, \quad f_1 = \alpha d_1, \\ &f_n = \alpha d_n = \alpha(2d_{n-1} + d_{n-2}) = 2\alpha d_{n-1} + \alpha d_{n-2} = 2f_{n-1} + f_{n-2}, \end{aligned}$$

somit ist auch $\alpha\mathcal{Q}$ eine Pell-Folge.

(b) Für $n \geqslant 0$ sei $d_n = c_{n+1}$. Wir müssen zeigen, dass $(d_0, d_1, d_2, \dots)$ eine Pell-Folge ist. Für $n \geqslant 2$ gilt

$$d_n = c_{n+1} = 2c_n + c_{n-1} = 2d_{n-1} + d_{n-2}.$$

Somit erfüllt die Folge $(d_0, d_1, d_2, \dots)$ die Gleichung, welche Pell-Folgen charakterisiert.

(c) Gesucht sind die Eigenfolgen für den Verschiebungs-Operator $S \colon V \to V$. Angenommen, die Pell-Folge $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ ist eine Eigenfolge mit Eigenwert α. Dann gilt

$$(c_1, c_2, c_3, \dots) = S(c_0, c_1, c_2, \dots) = (\alpha \cdot c_0, \alpha \cdot c_1, \alpha \cdot c_2, \dots),$$

das heisst $c_n = \alpha c_{n-1}$ gilt für alle $n \geqslant 1$. Da $(c_0, c_1, \dots)$ eine Pell-Folge ist gilt die Gleichung

$$c_2 = 2c_1 + c_0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 c_0 = 2\alpha c_0 + c_0. \tag{3}$$

Falls $c_0 = 0$, so ist auch $c_1 = \alpha c_0 = 0$ und somit wäre $(c_0, c_1, \dots) = \mathcal{P}_{0,0}$ die Null-Folge. Da wir aber eine Eigenfolge suchen, und Eigenfolgen per Definition nie Null-Folgen sind, kann das nicht der Fall sein. Somit gilt $c_0 \neq 0$ und wir können in (3) durch c_0 dividieren und erhalten

$$\alpha^2 = 2\alpha + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0.$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $\gamma = 1+\sqrt{2}$ und $\delta = 1-\sqrt{2}$. Also ist die Eigenfolge $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ entweder

$$c_0 \cdot (1, \gamma, \gamma^2, \dots),$$

oder

$$c_0 \cdot (1, \delta, \delta^2, \dots).$$

(d) Gesucht sind $x, y \in \mathbb{R}$, sodass

$$\mathcal{P}_{a,b} = x\mathcal{P}_{1,\gamma} + y\mathcal{P}_{1,\delta}$$

gilt. Analog wie in der ersten Aufgabe führt dies zu dem Gleichungssystem

$$a = x + y \tag{4}$$

$$b = x\gamma + y\delta = (x + y) + \sqrt{2}(x - y). \tag{5}$$

Auflösen nach den Unbekannten x und y liefert

$$x = \frac{1}{2}(a + \frac{b-a}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\delta a + b)$$

$$y = \frac{1}{2}(a - \frac{b-a}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma a - b).$$

Wir erhalten das Ergebnis

$$\mathcal{P}_{a,b} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\delta a + b)\mathcal{P}_{1,\gamma} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma a - b)\mathcal{P}_{1,\delta}.$$

(e) Den geschlossenen Wert für den $n$ten Term der Folge $\mathcal{P}_{a,b} = (c_0, c_1, c_2, \dots)$ erhalten wir wieder durch die geschlossenen Terme der Folgenglieder der beiden Eigenfolgen $\mathcal{P}_{1,\gamma}$ und $\mathcal{P}_{1,\delta}$, sowie der Linearkombination aus der vorherigen Aufgabe. Nämlich

$$c_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\delta a + b)\gamma^n + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma a - b)\delta^n.$$

Wir beachten, dass $\gamma\delta = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = -1$ gilt und folgern daraus die geschlossene Form

$$c_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(a(\gamma^{n-1} - \delta^{n-1}) + b(\gamma^n - \delta^n)).$$

(f) Falls die Rekursion durch

$$c_n = 2c_{n-1} + c_{n-2}$$

gegeben ist, und wir eine Eigenfolge für den Verschiebungsoperator finden wollen, führen dieselben Argumente wie vorhin zu der quadratischen Gleichung

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0.$$

Dieses Polynom hat aber mit 1 eine doppelte Nullstelle. Somit gibt es zwar eine Eigenfolge, jedoch können wir nicht jede andere Folge durch eine Linearkombination mit Eigenfolgen darstellen, da wir so nur die konstanten Folgen

$$c \cdot (1, 1, 1, \dots)$$

erreichen könnten. Die Folge

$$(0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots),$$

die durch die Startwerte $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ gegeben ist, erfüllt zwar die Rekursion, ist aber nicht konstant und somit insbesondere kein Vielfaches der konstanten Eigenfolge

$$(1, 1, 1, \dots)$$

des Verschiebungsoperators.

3. Bestimme alle Teilmengen der Menge $\{1, 2, 3\}$.

Solution: Die Menge $\{1, 2, 3\}$ hat insgesamt $2^3 = 8$ Teilmengen. Diese sind:

$$\begin{aligned}
&\varnothing,\\
&\{1\}, \{2\}, \{3\},\\
&\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\},\\
&\{1,2,3\}.
\end{aligned}$$

Die leere Menge $\varnothing$ ist immer eine Teilmenge jeder Menge, und jede Kombination der Elemente $1, 2, 3$ bildet eine weitere Teilmenge.

4. Es seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Funktionen.

(a) Wenn f und g injektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.

(b) Wenn f und g surjektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.

Solution:

(a) Wir wollen zeigen, dass $g \circ f$ injektiv ist. Das bedeutet, wir müssen zeigen, dass für $x_1, x_2 \in X$ die Gleichung $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ schon impliziert, dass $x_1 = x_2$.

Angenommen, $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Dies bedeutet:

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Da g injektiv ist, folgt daraus $f(x_1) = f(x_2)$. Da f ebenfalls injektiv ist, folgt daraus $x_1 = x_2$.

Damit ist gezeigt, dass $g \circ f$ injektiv ist.

(b) Wenn $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ surjektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.

Beweis: Wir wollen zeigen, dass $g \circ f$ surjektiv ist. Das bedeutet, wir müssen zeigen, dass für jedes $z \in Z$ ein $x \in X$ existiert, so dass $(g \circ f)(x) = z$.

Da g surjektiv ist, gibt es für jedes $z \in Z$ ein $y_z \in Y$, so dass $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, gibt es für jedes $z \in Z$ ein $x_z \in X$, so dass $f(x) = y_z$.

Damit folgt für jedes $z \in Z$, dass es ein $x_z \in X$ gibt, so dass:

$$(g \circ f)(x_z) = g(f(x_z)) = z.$$

Das zeigt, dass $g \circ f$ surjektiv ist.

5. Es sei $M = \{1, \ldots, n\}$. Eine Permutation ist eine bijektive Abbildung $\sigma : M \to M$. Bestimmen Sie die Anzahl aller Permutationen.

Solution: Zunächst bemerken wir, dass eine Permutation eine Abbildung $\sigma : M \to M$ ist, bei der jedem Element $i \in M$ genau ein anderes Element $\sigma(i) \in M$ zugeordnet wird, und zwar so, dass alle Elemente auf genau ein anderes abgebildet werden. Genauso ist jede solche Abbildung eine Permutation.

Um die Anzahl der Permutationen zu bestimmen, können wir uns überlegen, wie viele Möglichkeiten es gibt, die Elemente von M nacheinander anzuordnen: Für das erste Element gibt es n Möglichkeiten, da alle n Elemente zur Verfügung stehen. Nachdem das erste Element gewählt wurde, bleiben noch $n - 1$ Elemente übrig, also gibt es $n - 1$ Möglichkeiten für das zweite Element. Nachdem drei Elemente gewählt wurden, bleiben noch $n - 2$ Elemente übrig, also gibt es $n - 2$ Möglichkeiten für das dritte Element. Diesen Prozess setzen wir fort, bis nur noch ein Element übrig bleibt. Für das letzte Element gibt es dann genau 1 Möglichkeit.

Insgesamt gibt es also $n \cdot (n - 1) \cdot \ldots 1 = n!$ Möglichkeiten.