D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2024

Prof. Sarah Zerbes

Serie 2

1. Es ei $p > 2$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass in $\mathbb{F}_p$ folgendes gilt:
$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) = p - 1.$$

2. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass die multiplikative Identität eindeutig ist, das heisst wenn 1 und $1'$ beide neutrale Elemente bezüglich der Multiplikation sind, dann $1 = 1'$. Leiten Sie daraus ab, dass jedes $0 \neq x \in K$ genau ein multiplikatives inverses Element hat.

3. Es seien K ein Körper und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(K)$. Finden Sie ein Kriterium, wann A invertierbar ist, und geben Sie eine Formel für A^{-1}.

4. Es seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Entscheiden Sie fuer jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist, und geben Sie einen Beweis oder Gegenbeispiel.

   (a) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$;

   (b) if $AB = 0$, dann gilt $A = 0$ oder $B = 0$.

   (c) wenn $AB = 0$, dann koennen A und B nicht beide invertierbar sein.

   (d) wenn A und B invertierbar sind, dann gilt das Gleiche fuer $A - B$.

   Hinweis: Gegenbeispiele lassen sich oft schon für $n = 2$ finden.

5. Finden Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ so dass A^n die Nullmatrix ist und A^{n-1} nicht die Nullmatrix ist.