D-MATH
Prof. Dr. S. Zerbes

Lineare Algebra II

FS 2025

Serie 20

Skalarprodukt, Orthogonalität

1. Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Vektorraum mit innerem Produkt. Ziel dieser Aufgabe ist es zu beweisen, dass für jeden Vektor ungleich Null ein eindeutiger Vektor auf der Einheitskugel mit minimalem Abstand existiert. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Seien $x, y \in V$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$ und $\langle x, y\rangle = 1$. Dann gilt $x = y$.

   (b) Sei $v \in V \setminus \{0\}$ beliebig. Für jedes $u \in V$ mit $\|u\| = 1$ gilt
   $$\left\| v - \frac{v}{\|v\|} \right\| \leqslant \|v - u\|.$$

   (c) Sei $v \in V \setminus \{0\}$. Weiterhin sei $u \in V$ mit $\|u\| = 1$, sodass
   $$\left\| v - \frac{v}{\|v\|} \right\| = \|v - u\|.$$
   Dann gilt $u = \frac{v}{\|v\|}$.

   *(d) Gilt die Aussage auch, wenn die Norm nicht von einem Skalarprodukt induziert wird?

2. (a) Angenommen $\theta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass
   $$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$
   und
   $$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$
   orthonormale Basen von $\mathbb{R}^2$ sind.

   (b) Zeigen Sie, dass jede orthonormale Basis von $\mathbb{R}^2$ eine der Formen in (a) hat.

3. Betrachten Sie
   $$\left\{ A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$
   und versehen Sie $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit dem in Serie 20 Übung 6 definierten Skalarprodukt. Finden Sie eine orthonormale Basis von $\mathrm{LH}(A_1, A_2)$.

4. Seien V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $S \subset V$ ein Orthonormalsystem. Zeige, dass sich S zu einer Orthonormalbasis von V ergänzen lässt.

5. Ein Unterraum U von $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt sei aufgespannt von den beiden Vektoren $v_1 = (1,1,1)^T$ und $v_2 = (0,2,1)^T$.

   (a) Bestimme je eine Orthonormalbasis von U und von $U^\perp$.

   (b) Berechne die Darstellungsmatrizen der orthogonalen Projektionen $\mathbb{R}^3 \to U$ und $\mathbb{R}^3 \to U^\perp$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und der jeweiligen Basis aus (a).

6. Zeige die folgende Behauptung:

   Satz. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit innerem Produkt. Nehme an, dass $T \in \mathrm{Hom}(V)$. Wenn T eine obere Dreiecksmatrix bezüglich einer Basis von V hat, dann hat T eine obere Dreiecksmatrix bezüglich einer orthonormalen Basis von V.*

7. Für jeden der folgenden Vektorräume V mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ soll die Menge $U^\perp$ für die gegebene Teilmenge U gefunden werden.

   (a) Betrachte zuerst

$$V_1 = \left\{ (a_0, a_1, a_2, \dots) \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}, \quad \langle (a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n,$$

$$U_1 = \{(a_n)_{n=0}^{\infty} \in V \mid \exists N \geqslant 0 \text{ sodass } \forall m \geqslant N : a_m = 0\}$$

   (b) Zweitens betrachte

$$V_2 = C([0,1]), \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx,$$

$$U_2 = \left\{ f \in V \mid \int_0^{1/2} f(x) dx = 0 \right\}.$$