Musterlösung Serie 20

Skalarprodukt, Orthogonalität

1. Es sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein reeller Vektorraum mit innerem Produkt. Ziel dieser Aufgabe ist es zu beweisen, dass für jeden Vektor ungleich Null ein eindeutiger Vektor auf der Einheitskugel mit minimalem Abstand existiert. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Seien $x, y \in V$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$ und $\langle x, y \rangle = 1$. Dann gilt $x = y$.

   (b) Sei $v \in V \setminus \{0\}$ beliebig. Für jedes $u \in V$ mit $\|u\| = 1$ gilt

   $$\left\| v - \frac{v}{\|v\|} \right\| \leqslant \|v - u\|.$$

   (c) Sei $v \in V \setminus \{0\}$. Weiterhin sei $u \in V$ mit $\|u\| = 1$, sodass

   $$\left\| v - \frac{v}{\|v\|} \right\| = \|v - u\|.$$

   Dann gilt $u = \frac{v}{\|v\|}$.

   *(d) Gilt die Aussage auch, wenn die Norm nicht von einem Skalarprodukt induziert wird?

   Lösung:

   (a) Es gilt

   $$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = 2 - 2 = 0,$$

   also $x = y$.

   (b) Sei $u \in V$ mit $\|u\| = 1$. Aus der umgekehrten Dreiecksungleichung erhalten wir

   $$\|v-u\| \geqslant |\|v\|-\|u\|| = |\|v\|-1| = \|v\| \cdot \left|1 - \frac{1}{\|v\|}\right| = \left\| v \left(1 - \frac{1}{\|v\|}\right) \right\| = \left\| v - \frac{v}{\|v\|} \right\|.$$

   (c) Da sowohl u und $\frac{v}{\|v\|}$ die Norm 1 haben, genügt es zu zeigen, dass

   $$\left\langle \frac{v}{\|v\|}, u \right\rangle = 1,$$

was äquivalent zu

$$\langle v, u \rangle = \|v\|$$

ist. Es gilt

$$\|v-u\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v, u \rangle + \|u\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle u, v \rangle + 1.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
\langle v, u \rangle &= \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 + 1 - \|v-u\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 + 1 - \left\|v - \frac{v}{\|v\|}\right\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 + 1 - \|v\|^2 + 2\left\langle v, \frac{v}{\|v\|}\right\rangle - \underbrace{\left\|\frac{v}{\|v\|}\right\|^2}_{=1}\right) \\
&= \frac{1}{\|v\|}\langle v, v \rangle = \|v\|,
\end{aligned}$$

wie gewünscht.

Aliter: Wir beweisen nur, dass $\frac{v}{\|v\|}$ jener eindeutige normierte Vektor mit minimalem Abstand zu v ist. Unser Ziel ist es also das Minimierungsproblem

$$\min_{\substack{u \in V \\ \|u\|=1}} \|v-u\|$$

zu lösen und zu zeigen, dass das Minimum nur bei einem Argument angenommen wird. Da wir ein Minimum über nicht-negative reelle Zahlen betrachten, und die Funktion $x \mapsto x^2$ dort streng monoton wachsend ist, können wir also äquivalent das Problem

$$\min_{\substack{u \in V \\ \|u\|=1}} \|v-u\|^2$$

lösen. Es gilt

$$\|v-u\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v, u \rangle + 1,$$

und dieser Wert ist minimal, wenn $\langle v, u \rangle$ maximal ist. Unser Problem ist daher äquivalent zu

$$\max_{\substack{u \in V \\ \|u\|=1}} \langle v, u \rangle.$$

Nach der Cauchy-Schwarz Ungleichung gilt für jedes $u \in V$ mit $\|u\| = 1$

$$\langle v, u \rangle \leqslant \|v\|\|u\| = \|v\|.$$

Dieses Maximimum wird bei $\frac{v}{\|v\|}$ angenommen. Daher folgt schon einmal, dass $\frac{v}{\|v\|}$ minimalen Abstand zu v unter allen normierten Vektoren hat. Angenommen, ein

Vektor $u \in V$ mit $\|u\| = 1$ hat ebenfalls minimalen Abstand zu v. Dann gilt also $\langle v, u\rangle = \|v\|$ nach obiger Überlegung. In der Cauchy-Schwarz Ungleichung tritt Gleichheit genau dann ein, wenn die Vektoren linear abhängig sind. Da $v \neq 0$, existiert also ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $u = \lambda v$. Dann ist

$$\|v\| = \langle v, u\rangle = \lambda\langle v, v\rangle = \lambda\|v\|^2,$$

woraus $\lambda = \frac{1}{\|v\|}$ und somit $u = \frac{v}{\|v\|}$ folgt. Damit ist auch die Eindeutigkeit bewiesen.

Abschließend bemerken wir noch, dass wir obige Beweise nahezu wörtlich auch auf den komplexen Fall übertragen können. Denn im komplexen Fall gilt

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 - \langle x, y\rangle - \overline{\langle x, y\rangle} + \|y\|^2 = \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}(\langle$$

Adaptiert man nun die obigen Rechnungen gemäß, erhält man entsprechende Resultate.

2. (a) Angenommen $\theta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

orthonormale Basen von $\mathbb{R}^2$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass jede orthonormale Basis von $\mathbb{R}^2$ eine der Formen in (a) hat.

Lösung:

(a) Man kann leicht überprüfen, dass jeder der vier Vektoren die Norm $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ hat, was gleich 1 ist. Außerdem haben wir

$$\begin{aligned} \langle(\cos\theta, \sin\theta), (-\sin\theta, \cos\theta)\rangle &= -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta = 0 \\ \langle(\cos\theta, \sin\theta), (\sin\theta, -\cos\theta)\rangle &= \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta = 0, \end{aligned}$$

was zeigt, dass sie orthogonal sind.

(b) Offensichtlich können wir für beliebige v und u in $\mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = \|u\| = 1$ schreiben $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ und $u = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ für einige Winkel θ und α. Wenn v, u eine Orthonormalbasis ist, dann muss gelten

$$\begin{aligned} 0 = \langle v, u\rangle &= \langle(\cos\theta, \sin\theta), (\cos\alpha, \sin\alpha)\rangle \\ &= \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha \\ &= \cos(\theta - \alpha). \end{aligned}$$

Eine Lösung ist, θ und α so zu wählen, dass $\alpha = \theta + \frac{\pi}{2}$. Dann

$$\begin{aligned}(\cos\alpha, \sin\alpha) &= \left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{2} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{2}, \sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \\ &= (-\sin\theta, \cos\theta).\end{aligned}$$

Was zeigt, dass v, u von der ersten Form in Teil (a) sind.

3. Betrachten Sie

$$\left\{A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right\} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

und versehen Sie $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit dem in Serie 20 Übung 6 definierten Skalarprodukt. Finden Sie eine orthonormale Basis von $\mathrm{LH}(A_1, A_2)$.

Lösung: Das betreffende Skalarprodukt ist ähnlich dem Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$. Wir beginnen damit, A_1 zu normieren:

$$W_1 := \frac{1}{2}A_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der zweite Schritt besteht darin,

$$B_2 = A_2 - \mathrm{Tr}(A_2^T W_1)W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 3/2 \\ 3/2 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

Nun normieren wir B_2:

$$W_2 := \frac{1}{3}B_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\{W_1, W_2\}$ eine orthonormale Basis von $\mathrm{LH}(A_1, A_2)$.

4. Seien V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $S \subset V$ ein Orthonormalsystem. Zeige, dass sich S zu einer Orthonormalbasis von V ergänzen lässt.

Lösung: Schreibe $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ und ergänze $(v_1, \dots, v_m)$ zu einer geordneten Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von V. Wende Gram-Schmidt-Orthogonalisierung darauf an mit dem Resultat $(b_1, \dots, b_n)$. Die Konstruktion impliziert dann $(b_1, \dots, b_m) = (v_1, \dots, v_m)$; folglich ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis von V, welche S enthält.

Aliter: Nach Annahme ist S eine Orthonormalbasis des Unterraums $U := \langle S\rangle$. Da V endlich-dimensional ist, gilt $V = U \oplus U^\perp$. Dabei ist $U^\perp$ wieder endlich-dimensional und besitzt daher eine Orthonormalbasis T. Nach der Vorlesung ist dann $S \cup T$ eine Orthonormalbasis von V.

5. Ein Unterraum U von $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt sei aufgespannt von den beiden Vektoren $v_1 = (1,1,1)^T$ und $v_2 = (0,2,1)^T$.

   (a) Bestimme je eine Orthonormalbasis von U und von $U^\perp$.

   (b) Berechne die Darstellungsmatrizen der orthogonalen Projektionen $\mathbb{R}^3 \to U$ und $\mathbb{R}^3 \to U^\perp$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und der jeweiligen Basis aus (a).

Lösung:

(a) Ein einfacher Weg, Orthonormalbasen von U und $U^\perp$ gleichzeitig zu bestimmen, ist die Anwendung der Gram-Schmidt-Orthonormalisierung auf die Vektoren v_1, v_2 sowie einen zusätzlichen Vektor $v_3 \in \mathbb{R}^3$, der die beiden zu einer Basis ergänzt, beispielsweise $v_3 = (1,0,0)^T$. Man erhält damit

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad w_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Also ist (w_1, w_2) eine Orthonormalbasis von U und w_3 eine von U^T.

Alternativ ermittelt man mit Gram-Schmidt für die Vektoren (v_1, v_2) eine Orthonormalbasis (w_1, w_2) von U, und löst unabhängig davon das lineare Gleichungssystem $\langle v_1, w\rangle = \langle v_2, w\rangle = 0$ um einen Basisvektor u' von U^T zu bestimmen, so dass dann $w_3 := u'/\|u'\|$ eine Orthonormalbasis von U^T ist.

(b) Die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf U ist gegeben durch die Formel

$$v \mapsto \langle w_1, v\rangle w_1 + \langle w_2, v\rangle w_2.$$

Ihre Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis (e_1, e_2, e_3) von $\mathbb{R}^3$ und der Basis (w_1, w_2) von U ist gleich

$$\big(\langle e_j, w_i\rangle\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\ 1\leqslant j\leqslant 3}} = (w_1|w_2)^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}.$$

Analog erhält man für die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf $U^\perp$ die Matrix

$$\big(\langle e_j, w_3\rangle\big)_{1\leqslant j\leqslant 3} = w_3^T = \begin{pmatrix}1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6}\end{pmatrix}.$$

6. Zeige die folgende Behauptung:

   Satz. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein endlichdimensionaler* $\mathbb{K}$*-Vektorraum mit innerem Produkt. Nehme an, dass* $T \in \mathrm{Hom}(V)$*. Wenn* T *eine obere Dreiecksmatrix bezüglich einer Basis von* V *hat, dann hat* T *eine obere Dreiecksmatrix bezüglich einer orthonormalen Basis von* V*.*

   Beweis. Angenommen, T hat eine obere Dreiecksmatrix bezüglich einiger Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V. Somit ist $\mathrm{LH}\,(v_1, \ldots, v_j)$ für jedes $j = 1, \ldots, n$ unter T invariant. Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf $v_1, \ldots, v_n$ an und erzeugen Sie eine Orthonormalbasis $e_1, \ldots, e_n$ von V. Da

   $$\mathrm{LH}\,(e_1, \ldots, e_j) = \mathrm{LH}\,(v_1, \ldots, v_j)$$

   für jedes j ist, folgern wir, dass $\mathrm{LH}\,(e_1, \ldots, e_j)$ für jedes $j = 1, \ldots, n$ unter T invariant ist. Somit hat T eine obere Dreiecksmatrix bezüglich der Orthonormalbasis $e_1, \ldots, e_n$.

   $\square$

7. Für jeden der folgenden Vektorräume V mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ soll die Menge $U^\perp$ für die gegebene Teilmenge U gefunden werden.

   (a) Betrachte zuerst

   $$V_1 = \left\{ (a_0, a_1, a_2, \ldots) \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}, \quad \langle (a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n,$$

   $$U_1 = \{(a_n)_{n=0}^{\infty} \in V \mid \exists N \geqslant 0 \text{ sodass } \forall m \geqslant N : a_m = 0\}$$

   (b) Zweitens betrachte

   $$V_2 = C([0,1]), \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx,$$

   $$U_2 = \left\{ f \in V \mid \int_0^{1/2} f(x) dx = 0 \right\}.$$

   Solutions:

   (a) Für $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ schreiben wir $s^{(i)}$ für die Folge, deren Elemente alle 0 sind, ausser dem i-ten Element, welches 1 ist. Für alle $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ ist dann $s^{(i)} \in U$. Sei $b = (b_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \in U^\perp$. Per Definition gilt für jedes $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$

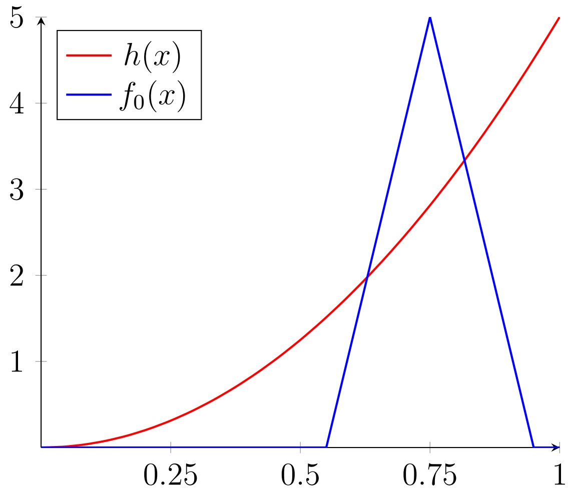
   $$\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(i)} b_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b_i = 0.$$

   Da dies für alle Indizes i gilt, folgt $b = 0_V$. Da b ein beliebiges Element von $U^\perp$ ist, erhalten wir $U^\perp = \{0_V\}$.

(b) Bemerke zunächst, dass jede Funktion $h \in U^{\perp}$ auf $[1/2, 1]$ verschwindet. Um dies zu sehen nehme an, dass $h \in U^{\perp}$ nicht auf $[1/2, 1]$ verschwände. Aus der Stetigkeit von h folgte dann die Existenz von $x_0 \in (1/2, 1)$ und $n \in \mathbb{N}$ so, dass h sein Vorzeichen im Intervall $(x_0 - 1/n, x_0 + 1/n)$ nicht ändert und sodass dieses in $(1/2, 1)$ enthalten wäre. Sei f_0 die stückweise lineare Funktion definiert durch

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, x_0 - \frac{1}{n}\right] \\ n, & x = x_0 \\ 0, & x \in \left[x_0 + \frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Beispiel für $h(x) = 5x^2$, $x_0 = 3/4$, $n = 5$.



Dann wäre $f_0 \in U$. Es folgte

$$\left| \int_0^1 f_0(x) h(x) dx \right| = \left| \int_{x_0 - 1/n}^{x_0 + 1/n} f_0(x) h(x) dx \right| > 0,$$

da der Integrand sein Vorzeichen $\left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right]$ in nicht wechselte. Dies wäre ein Widerspruch zu $h \in U^{\perp}$.

Als nächstes zeigen wir, dass jedes $g \in U^{\perp}$ auf $[0, 1/2]$ konstant ist. Seien $a, b \in (0, 1/2)$ mit $a < b$. Dann existiert $N(a, b) \in \mathbb{N}$, sodass für alle ganzahligen $n \geqslant N(a, b)$ die stückweise lineare Funktion f_n definiert wie folgt in V enthalten ist:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, a - \frac{1}{n}\right] \\ n, & x = a \\ 0, & x \in \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right] \\ -n, & x = b \\ 0, & x \in \left[b + \frac{1}{n}, 1/2\right] \end{cases}$$

Da das Integral von f_n auf $[0, 1/2]$ trivial ist, gilt $f_n \in U$. Sei $g \in U^{\perp}$. Dann ist

$$\int_0^{1/2} f(x)g(x)dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{a-1/n}^{a+1/n} f_n(x)g(x) = -\int_{b-1/n}^{b+1/n} f_n(x)g(x)dx.$$

Im Fall $n \to +\infty$ konvergiert die zweite Gleichung zu $g(a) = g(b)$. Wir zeigen die Konvergenz der linken Seite der entsprechenden zu $g(a)$ (die Konvergenz rechte Seite lässt sich ähnlich zeigen). Da g in a stetig ist, existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass

$$|x - a| < \delta \implies |g(x) - g(a)| < \varepsilon.$$

Sei nun n so, dass $1/n < \delta$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{a-1/n}^{a+1/n} f_n(x)g(x)dx - \int_{a-1/n}^{a+1/n} f_n(x)g(a)dx \right| \\
= & \left| \int_{a-1/n}^{a+1/n} f_n(x)(g(x) - g(a))dx \right| \\
\leqslant & \int_{a-1/n}^{a+1/n} f_n(x) \left| g(x) - g(a) \right| dx \\
< & \ \varepsilon \int_{a-1/n}^{a+1/n} |f_n(x)| \, dx \\
= & \ \varepsilon,
\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass f_n auf $[a - 1/n, a + 1/n]$ zu 1 integriert, um die letzte Gleichung zu erhalten. Wenn wir ε gegen 0 gehen lassen, zeigt dies die gewünschte Konvergenz.

Da g stetig ist und a und b beliebig gewählt waren, muss g auf $[0, 1/2]$ konstant sein. Da g auf $[1/2, 1]$ verschwindet folgt aus seiner Stetigkeit, dass g auf dem Intervall $[0, 1]$ verschwindet. Also ist $U^\perp = \{0_V\}$.