Serie 21

Skalarprodukt, Orthogonalität

1. Es sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $Q \in O(n)$ und eine untere Dreiecksmatrix $R \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit positiven Elementen entlang der Diagonalen, so dass $A = RQ$.

2. Berechne eine Zerlegung $A = QR$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in eine orthogonale Matrix Q und eine rechte obere Dreiecksmatrix R. Verwende diese Zerlegung, um das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (0, 3, -3)^T$ zu lösen.

3. Berechne eine QR-Zerlegung von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Sei $A \in O_n(\mathbb{R})$. Zeige, dass es einen eindeutigen Unterraum $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $A|_U = \mathrm{id}_U$ und $A(U^\perp) \subset U^\perp$ ist und $A|_{U^\perp}$ keine Fixpunkte ausser $0 \in U^\perp$ hat.

5. Sei $V = C([-1, 1], \mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[-1, 1]$ mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$

für $f, g \in V$. Sei $\varphi : V \to \mathbb{R}$ das lineare Funktional definiert durch $\varphi(f) = f(0)$. Zeige, dass kein $g \in V$ existiert, sodass

$$\forall f \in V : \varphi(f) = \langle f, g\rangle$$

ist.

Warum ist dies kein Gegenbeispiel zu Theorem 13.8.3 der Vorlesung?

6. Das Ziel dieser Übung ist es, den folgenden Satz zu beweisen:

   Satz. *Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und $\mathcal{F}$ eine nicht-leere Menge von kommutierenden normalen Operatoren in* $\mathrm{Hom}(V)$. *Mit anderen Worten, für alle $A, B \in \mathcal{F}$ gilt $AB = BA$ und $AA^* = A^*A$. Es existiert eine Orthonormalbasis von V, bezeichnet mit $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, sodass für alle $1 \leqslant j \leqslant n$ und für alle $A \in \mathcal{F}$ der Vektor v_j ein Eigenvektor von A ist. Solche Operatoren werden* ***simultan diagonalisierbar*** *genannt.*

   (a) Sei U ein linearer Unterraum von V und $A \in \mathrm{Hom}(V)$ mit $AU \subseteq U$. Beweisen Sie, dass A einen Eigenvektor in U hat.

   (b) Sei U ein linearer Unterraum von V und $\mathcal{G} \subset \mathrm{Hom}(V)$ eine Familie von kommutierenden Operatoren, sodass für alle $A \in \mathcal{G}$ gilt $AU \subseteq U$. Beweisen Sie, dass es einen nicht-null Vektor $v \in U$ gibt, der ein Eigenvektor für jedes $A \in \mathcal{G}$ ist.

   (c) Verwenden Sie (a) und (b), um den obigen Satz zu beweisen.

   (d) Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^2$, in der

   $$A := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und } B := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$$

   simultan diagonalisiert sind, falls diese den Voraussetzungen des Satzes entsprechen.

In den folgenden zwei Aufgaben wollen wir eine wichtige Charakterisierungen von positiv definiten Matrizen herleiten.

7. In dieser Aufgabe beweisen wir den *Trägheitssatz von Sylvester*. Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ hermitesch. Dann gibt es eine invertierbare Matrix $B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, sowie eindeutig bestimmte $r, s \in \mathbb{N}_0$, sodass

   $$B^*AB = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{s}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r-s}).$$

   Genauer gilt

   $$\begin{aligned} r &= \max\{\dim(U) \mid U \leqslant V, \forall u \in U \setminus \{0\} \colon u^*Au > 0\}, \\ s &= \max\{\dim(U) \mid U \leqslant V, \forall u \in U \setminus \{0\} \colon u^*Au < 0\}, \end{aligned}$$

   wobei u^* jener Vektor ist, der aus u durch Transposition und komplexe Konjugation entsteht.

   Wir schreiben

   $$\langle u, v \rangle = v^*Au$$

   für $u, v \in \mathbb{C}^n$. Beachte, dass das kein inneres Produkt in unserem Sinne ist, da die Definitheitsbedingung nicht erfüllt sein muss. Allerdings ist es davon abgesehen eine Sesquilinearform und erfüllt insbesondere $\langle u, u \rangle \in \mathbb{R}$.

(a) Wir zeigen zuerst die Existenz von B und der Diagonalmatrix. Wir verwenden Induktion nach n. Der Basisfall $n = 0$ ist trivial. Angenommen, $n > 0$, und die Aussage gilt für alle hermiteschen Matrizen der Dimension $n-1$. Beweisen Sie die Aussage im Fall $\langle u, v\rangle_A = 0$ für alle $u, v \in \mathbb{C}^n$.

(b) Zeigen Sie, dass für $v, w \in \mathbb{C}^n$ die Gleichung

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle + \mathrm{i}(\langle u+\mathrm{i}v, u+\mathrm{i}v\rangle - \langle u-\mathrm{i}v, u-\mathrm{i}v\rangle))$$

gilt.

(c) Wir nehmen nun an, dass es $u, v \in \mathbb{C}^n$ gibt mit $\langle u, v\rangle \neq 0$. Zeigen Sie, dass es ein $w \in \mathbb{C}^n$ gibt mit $\langle w, w\rangle \neq 0$.

(d) Wir ersetzen w durch

$$x = \frac{w}{\sqrt{|\langle w, w\rangle|}}.$$

Zeigen Sie, dass $\langle x, x\rangle \in \{-1, 1\}$.

(e) Sei

$$W = \{y \in \mathbb{C}^n \mid \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $\dim(W) = n - 1$ und dass

$$\mathbb{C}^n = W \oplus \mathrm{span}(\{x\}).$$

(f) Wir erweitern x durch Elemente $w_2, \ldots, w_n \in W$ zu einer Basis von $\mathbb{C}^n$. Wir bezeichnen mit C jene invertierbare Matrix, die durch $Ce_1 = x$, $Ce_j = w_j$ für $j = 2, \ldots, n$ eindeutig festgelegt ist. Zeigen Sie, dass

$$C^*AC = \begin{pmatrix} \langle x, x\rangle & 0_{n-1}^T \\ 0_{n-1} & A' \end{pmatrix},$$

wobei 0_{n-1} einen Spaltenvektor mit $n - 1$ Einträgen, die alle Null sind, bezeichnet und wobei A' eine Matrix der Dimension $n - 1$ ist.

(g) Zeigen Sie, dass A' hermitesch ist und verwenden Sie die Induktionsvoraussetzung, um den Existenzbeweis zu vollenden.

(h) Wir zeigen nun noch, dass r tatsächlich mit dem oben behaupteten Wert übereinstimmt. Es sei

$$N = \max\{\dim(U) \mid U \leqslant V, \forall u \in U \setminus \{0\} \colon u^*Au > 0\}.$$

Wir zeigen zuerst $r \leqslant N$. Es sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ die Basis der Spalten von B. Wir setzen $W = \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_r)$. Zeigen Sie, dass für alle $w \in W \setminus \{0\}$ gilt, dass $w^*Aw > 0$, und folgern Sie daraus, dass $r \leqslant N$.

(i) Wir zeigen $r \geqslant N$ per Widerspruch. Angenommen, es gibt einen Unterraum $U \leqslant V$ mit $\dim(U) > r$ und $u^*Au > 0$ für alle $u \in U \setminus \{0\}$. Sei $U' = \operatorname{span}(v_{r+1}, \dots v_n)$. Zeigen Sie, dass $U \cap U' \neq \{0\}$.

(j) Sei $x \in (U \cap U') \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass $\langle x, x \rangle \leqslant 0$, und erklären Sie, warum das ein Widerspruch ist. Folgern Sie, dass $r = N$.

(k) Indem Sie A durch $-A$ ersetzen und das bereits bewiesene anwenden, zeigen Sie die obige Formel für s.

8. Sei $A \in \mathrm{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$. Wir bezeichnen die linke obere $(k \times k)$-Teilmatrix von A als $A^{(k)}$. Die *Hauptminoren* von A sind die Werte $\det(A^{(k)})$ für $k = 1, \dots, n$. Sei A hermitesch. Dann ist A genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren von A positiv sind. Diese Aussage bezeichnet man als *Hauptminorenkriterium.*

(a) Es sei zunächst A positiv definit. Zeigen Sie, dass $A^{(k)}$ für alle $k = 1, \dots, n$ hermitesch und positiv definit ist.

(b) Es sei $1 \leqslant k \leqslant n$. Wir wählen eine invertierbare Matrix B_k und eine Diagonalmatrix D_k wie im Trägheitssatz von Sylvester, sodass $D_k = B_k^* A^{(k)} B_k$. Zeigen Sie, dass D_k positiv definit ist, und folgern Sie, dass alle Diagonaleinträge von D_k gleich 1 sind.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\det(B_k^*) = \overline{\det(B_k)}$$

und folgern Sie, dass $\det(A^{(k)}) > 0$.

(d) Nun nehmen wir umgekehrt an, dass alle Hauptminoren positiv sind. Für $1 \leqslant k \leqslant n$ sei

$$V_k = \operatorname{span}(\{e_1, \dots, e_k\}).$$

Wir zeigen durch Induktion nach k, dass die Einschränkung von A auf V_k positiv definit ist. Da $V_n = \mathbb{C}^n$ folgt daraus, dass A positiv definit ist. Zeigen Sie den Basisfall $k = 1$.

(e) Nun sei $1 < k \leqslant n$ und bereits bewiesen, dass A auf V_{k-1} eingeschränkt positiv definit ist. Zeigen Sie, dass $\det(D_k) > 0$.

(f) Zeigen Sie, unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung, sowie der Formel für r aus dem Trägheitssatz von Sylvester, dass alle Diagonaleinträge von D_k gleich 1 sind.

(g) Folgern Sie, dass A auf V_k eingeschränkt positiv definit ist, was den Beweis vollendet.