D-MATH Lineare Algebra II FS 2025

Prof. Dr. S. Zerbes

Musterlösung Serie 21

Skalarprodukt, Orthogonalität

1. Es sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $Q \in O(n)$ und eine untere Dreiecksmatrix $R \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit positiven Elementen entlang der Diagonalen, so dass $A = RQ$.

   Lösung: Nach dem Theorem der Vorlesung existiert eine QR-Zerlegung von A^{-1}, also $Q' \in O(n)$ und eine obere Dreiecksmatrix $R' \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit positiven Elementen entlang der Diagonalen, sodass $A^{-1} = Q'R'$. Invertieren der Gleichung liefert eine Zerlegung mit den gewünschten Eigenschaften $A = (R')^{-1}(Q')^{-1}$. Diese ist eindeutig, da wir ansonsten verschiedene QR-Zerlegungen von A^{-1} generieren könnten, was im Widerspruch zur Eindeutigkeit der QR-Zerlegung steht.

2. Berechne eine Zerlegung $A = QR$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   in eine orthogonale Matrix Q und eine rechte obere Dreiecksmatrix R. Verwende diese Zerlegung, um das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (0, 3, -3)^T$ zu lösen.

   Lösung: Mit dem Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren findet man die gesuchten Matrizen

$$Q = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Durch Multiplikation der Gleichung $Ax = QRx = b$ von links mit der invertierbaren Matrix $Q^{-1} = Q^T$ erhält man das äquivalente Gleichungssystem $Rx = Q^T b = (4, 1, -1)^T$. Da R obere Dreiecksgestalt hat, erhält man hieraus schnell die Lösung $x = (2, 1, -1)^T$.

3. Berechne eine QR-Zerlegung von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir wenden Gram-Schmidt auf die Spalten von A an und erhalten eine orthogonale Basis (v_1, v_2, v_3). Der Algorithmus liefert

$$
\begin{aligned}
v_1 &= A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
v_2 &= A^{(2)} - \frac{\left\langle v_1, A^{(2)} \right\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
v_3 &= A^{(3)} - \frac{\left\langle v_1, A^{(3)} \right\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\left\langle v_2, A^{(3)} \right\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Wir setzen rekursiv die Formeln ein und erhalten

$$
\begin{aligned}
v_1 &= A^{(1)} \\
v_2 &= -\frac{1}{2} A^{(1)} + A^{(2)} \\
v_3 &= -\frac{1}{3} A^{(1)} - \frac{1}{3} A^{(2)} + A^{(3)}.
\end{aligned}
$$

Normierung liefert die ONB (w_1, w_2, w_3) mit $w_i = \frac{1}{\|v_i\|} v_i$ $(i = 1, 2, 3)$, wobei

$$
\|v_1\| = \sqrt{2}, \quad \|v_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \|v_3\| = \frac{2}{\sqrt{3}}.
$$

Gegeben Vektoren $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n \in \mathbb{K}^m$ sei $(\tilde{v}_1 | \cdots | \tilde{v}_n) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ die Matrix, deren j-te Spalte gleich $\tilde{v}_j$ ist. Dann folgt aus obiger Rechnung

$$
A \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (v_1 \,| v_2 |\, v_3) = (w_1 \,| w_2 |\, w_3) \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.
$$

Mittels Gausselimination berechnet man

$$
\begin{pmatrix} [ccc|ccc]1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 + \frac{1}{3} Z_3]{Z_1 + \frac{1}{3} Z_3} \begin{pmatrix} [ccc|ccc]1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{Z_1 + \frac{1}{2} Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)
$$

und es folgt

$$
\begin{aligned}
A = (w_1\,|w_2|\,w_3) \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

4. Sei $A \in O_n(\mathbb{R})$. Zeige, dass es einen eindeutigen Unterraum $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $A|_U = \mathrm{id}_U$ und $A(U^\perp) \subset U^\perp$ ist und $A|_{U^\perp}$ keine Fixpunkte ausser $0 \in U^\perp$ hat.

   Lösung: Sei U der Eigenraum von A zum Eigenwert 1 (insbesondere $U = \{0\}$ falls 1 kein Eigenwert von A ist). Dann erfüllt U die Behauptungen. In der Tat gilt per Definition dass $A|_U = \mathrm{id}_U$ ist. Sei nun $w \in U^\perp$, also $\langle u, w\rangle = 0$ für alle $u \in U$, wobei $\langle , \rangle$ das euklidische Skalarprodukt von $\mathbb{R}^n$ ist. Dann gilt aber

$$0 = \langle u, w\rangle = \langle Au, Aw\rangle = \langle u, Aw\rangle,$$

   da A orthogonal ist und u laut Voraussetzung invariant unter A. Da dies für alle $u \in U$ gilt, folgt also $Aw \in U^\perp$, dh. $A(U^\perp) \subset U^\perp$. Wäre nun $w \in U^\perp \setminus \{0\}$ ein Fixpunkt, dh. $Aw = w$, dann wäre es ein Eigenvektor zum Eigenwert 1, dh. $w \in U$. Das ist ein Widerspruch da $U \cap U^\perp = \{0\}$ ist.
   Nehmen wir nun an wir hätten einen weiteren Teilraum W mit den Eigenschaften aus der Aufgabe. Die Bedingung $A|_W = \mathrm{id}_W$ ist äquivalent dazu, dass W im Eigenraum von A zum Eigenwert 1 enthalten ist, also $W \subset U$. Wäre W ein echter Teilraum von U so gäbe es einen Vektor $0 \neq w \in U$ senkrecht zu W. Dann ist w ein Fixpunkt von A, der in $W^\perp \setminus \{0\}$ enthalten ist, ein Widerspruch.

5. Sei $V = C([-1, 1], \mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[-1, 1]$ mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$

   für $f, g \in V$. Sei $\varphi : V \to \mathbb{R}$ das lineare Funktional definiert durch $\varphi(f) = f(0)$. Zeige, dass kein $g \in V$ existiert, sodass

$$\forall f \in V : \varphi(f) = \langle f, g\rangle$$

   ist.

   Warum ist dies kein Gegenbeispiel zu Theorem 13.8.3 der Vorlesung?

Lösung: Nehme an, dass ein solches $g \in V$ existiert. Sei $f_0 \equiv 1$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Dann wäre

$$1 = f_0(0) = \langle f_0, g\rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot g(x)dx = \int_{-1}^{1} g(x)dx.$$

Also existierte ein $x_0 \in (-1, 1)$ mit $g(x_0) > 0$ und, da g stetig wäre, existierte ein offenes Intervall U_0 mit $x_0 \in U_0$, sodass $g(x) > 0$ auf U_0 wäre. Indem wir U_0 wenn nötig schrumpfen, könnten wir annehmen, dass 0 nicht im Abschluss von U_0 enthalten wäre. Per Definition wäre $h(0) = 0$.

Definiere $h \in V$ als stetige Funktion auf $[-1, 1]$, welche auf einem Subinterval U_1 von U_0 strikt positv wäre und überall sonst verschwände, zum Beispiel als stückweise lineare Funktion wie in Aufgabe 6.(b) der 21. Serie.

Dann wäre

$$0 = h(0) = \langle h, g\rangle = \int_{-1}^{1} h(x)g(x)dx = \int_{U_1} h(x)g(x) > 0.$$

Die ist ein Widerspruch und zeigt somit, dass g nicht existiert.

Das widerspricht nicht dem Theorem 15.7.3, da dieser Satz nur für endlich dimensionale Räume gilt.

6. Das Ziel dieser Übung ist es, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz. *Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und $\mathcal{F}$ eine nicht-leere Menge von kommutierenden normalen Operatoren in* $\mathrm{Hom}(V)$. *Mit anderen Worten, für alle $A, B \in \mathcal{F}$ gilt $AB = BA$ und $AA^* = A^*A$. Es existiert eine Orthonormalbasis von V, bezeichnet mit $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, sodass für alle $1 \leqslant j \leqslant n$ und für alle $A \in \mathcal{F}$ der Vektor v_j ein Eigenvektor von A ist. Solche Operatoren werden **simultan diagonalisierbar** genannt.*

(a) Sei U ein linearer Unterraum von V und $A \in \mathrm{Hom}(V)$ mit $AU \subseteq U$. Beweisen Sie, dass A einen Eigenvektor in U hat.

(b) Sei U ein linearer Unterraum von V und $\mathcal{G} \subset \mathrm{Hom}(V)$ eine Familie von kommutierenden Operatoren, sodass für alle $A \in \mathcal{G}$ gilt $AU \subseteq U$. Beweisen Sie, dass es einen nicht-null Vektor $v \in U$ gibt, der ein Eigenvektor für jedes $A \in \mathcal{G}$ ist.

(c) Verwenden Sie (a) und (b), um den obigen Satz zu beweisen.

(d) Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^2$, in der

$$A := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und } B := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$$

simultan diagonalisiert sind, falls diese den Voraussetzungen des Satzes entsprechen.

Lösung:

(a) Da $AU \subseteq U$, ist die Einschränkung

$$\begin{aligned} A|_U : \ U &\to U \\ u &\mapsto A(u) \end{aligned}$$

wohldefiniert. Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, existiert ein Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von $A|_U$, und wir bezeichnen mit $w \in U$ einen zugehörigen Eigenvektor. Schließlich haben wir

$$A(w) = A|_U(w) = \lambda w.$$

Daher ist w ein Eigenvektor von A in U.

(b) Wir beweisen diese Behauptung durch Induktion über die Dimension von U. Nehmen wir zunächst an, dass $\dim(U) = 1$. Da für alle $A \in \mathcal{G}$, $AU \subseteq U$ gilt, haben wir sofort, dass für jeden nicht-null Vektor $u \in U$ und für jedes $A \in \mathcal{G}$ gilt, dass $Au = \lambda u$ für irgendein $\lambda \in \mathbb{C}$.

Nehmen wir nun an, dass die Behauptung für $1 \leqslant \dim(U) < k$ bewiesen ist und sei $\dim(U) = k$. Wenn jedes $A \in \mathcal{G}$ ein Vielfaches der Identität ist, sind wir fertig. Andernfalls fixieren wir ein $A \in \mathcal{G}$ so, dass $A \neq \mu\,\mathrm{id}$ für jedes $\mu \in \mathbb{C}$. Nach (a) existiert ein Eigenvektor w von A in U. Sei λ der entsprechende Eigenwert. Definiere

$$U' = \{v \in U \mid Av = \lambda v\}.$$

Nun ist $\dim(U') < \dim(U)$, da $A \neq \lambda\,\mathrm{id}$. Für jedes $B \in \mathcal{G}$ gilt dann $BU' \subseteq U'$. Tatsächlich, sei $v \in U'$, dann

$$A(Bv) = B(Av) = \lambda(Bv).$$

Also gibt es nach der Induktionshypothese einen nicht-null Vektor $v_0 \in U'$, der ein Eigenvektor für jedes Element von $\mathcal{G}$ ist.

(c) Sei $V = \mathbb{C}^n$. Nach (b) gibt es einen Vektor v_1, der ein Eigenvektor für jedes $A \in \mathcal{G}$ ist. Setze $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ und $V_1 = \mathrm{LH}(e_1)$. Wir haben in den Vorlesungen gesehen, dass e_1 ebenfalls ein Eigenvektor von A^* für jedes $A \in \mathcal{G}$ ist. Also $AV_1 \subseteq V_1$ und, nochmals nach einem Ergebnis aus den Vorlesungen, $AV_1^\perp \subseteq V_1^\perp$ für alle $A \in \mathcal{G}$. Setze $U_1 = V_1^\perp$ und benutze (b) in U_1. Es folgt, dass es einen nicht-null Vektor $v_2 \in V_1^\perp$ gibt, der ein Eigenvektor für jedes $A \in \mathcal{G}$ ist. Setze $e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$ und definiere

$$V_2 = \mathrm{LH}(e_1, e_2), \quad U_2 = V_2^\perp.$$

Wir beobachten, dass

$$A^*V_2 \subseteq V_2 \text{ und } AU_2 \subseteq U_2, \quad \text{für alle } A \in \mathcal{G}.$$

Verfahren Sie ähnlich, bis e_n gefunden ist.

(d) Direkte Rechnungen zeigen, dass A und B den Voraussetzunen genügen. Eine Orthonormalbasis ist

$$\mathfrak{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

In den folgenden zwei Aufgaben wollen wir eine wichtige Charakterisierungen von positiv definiten Matrizen herleiten.

7. In dieser Aufgabe beweisen wir den *Trägheitssatz von Sylvester*. Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ hermitesch. Dann gibt es eine invertierbare Matrix $B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, sowie eindeutig bestimmte $r, s \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$B^*AB = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{r}, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{s}, \underbrace{0,\ldots,0}_{n-r-s}).$$

Genauer gilt

$$r = \max\{\dim(U) \mid U \leqslant V, \forall u \in U \setminus \{0\} \colon u^*Au > 0\},$$
$$s = \max\{\dim(U) \mid U \leqslant V, \forall u \in U \setminus \{0\} \colon u^*Au < 0\},$$

wobei u^* jener Vektor ist, der aus u durch Transposition und komplexe Konjugation entsteht.

Wir schreiben

$$\langle u, v\rangle = v^* A u$$

für $u, v \in \mathbb{C}^n$. Beachte, dass das kein inneres Produkt in unserem Sinne ist, da die Definitheitsbedingung nicht erfüllt sein muss. Allerdings ist es davon abgesehen eine Sesquilinearform und erfüllt insbesondere $\langle u, u\rangle \in \mathbb{R}$.

(a) Wir zeigen zuerst die Existenz von B und der Diagonalmatrix. Wir verwenden Induktion nach n. Der Basisfall $n = 0$ ist trivial. Angenommen, $n > 0$, und die Aussage gilt für alle hermiteschen Matrizen der Dimension $n-1$. Beweisen Sie die Aussage im Fall $\langle u, v\rangle_A = 0$ für alle $u, v \in \mathbb{C}^n$.

(b) Zeigen Sie, dass für $v, w \in \mathbb{C}^n$ die Gleichung

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle + \mathrm{i}(\langle u+\mathrm{i}v, u+\mathrm{i}v\rangle - \langle u-\mathrm{i}v, u-\mathrm{i}v\rangle))$$

gilt.

(c) Wir nehmen nun an, dass es $u, v \in \mathbb{C}^n$ gibt mit $\langle u, v\rangle \neq 0$. Zeigen Sie, dass es ein $w \in \mathbb{C}^n$ gibt mit $\langle w, w\rangle \neq 0$.

(d) Wir ersetzen w durch

$$x = \frac{w}{\sqrt{|\langle w, w\rangle|}}.$$

Zeigen Sie, dass $\langle x, x\rangle \in \{-1, 1\}$.

(e) Sei

$$W = \{y \in \mathbb{C}^n \mid \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $\dim(W) = n-1$ und dass

$$\mathbb{C}^n = W \oplus \operatorname{span}(\{x\}).$$

(f) Wir erweitern x durch Elemente $w_2, \ldots, w_n \in W$ zu einer Basis von $\mathbb{C}^n$. Wir bezeichnen mit C jene invertierbare Matrix, die durch $Ce_1 = x$, $Ce_j = w_j$ für $j = 2, \ldots, n$ eindeutig festgelegt ist. Zeigen Sie, dass

$$C^*AC = \begin{pmatrix} \langle x, x\rangle & 0_{n-1}^T \\ 0_{n-1} & A' \end{pmatrix},$$

wobei 0_{n-1} einen Spaltenvektor mit $n-1$ Einträgen, die alle Null sind, bezeichnet und wobei A' eine Matrix der Dimension $n-1$ ist.

(g) Zeigen Sie, dass A' hermitesch ist und verwenden Sie die Induktionsvoraussetzung, um den Existenzbeweis zu vollenden.

(h) Wir zeigen nun noch, dass r tatsächlich mit dem oben behaupteten Wert übereinstimmt. Es sei

$$N = \max\{\dim(U) \mid U \leqslant V, \forall u \in U \setminus \{0\} \colon u^*Au > 0\}.$$

Wir zeigen zuerst $r \leqslant N$. Es sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ die Basis der Spalten von B. Wir setzen $W = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_r)$. Zeigen Sie, dass für alle $w \in W \setminus \{0\}$ gilt, dass $w^*Aw > 0$, und folgern Sie daraus, dass $r \leqslant N$.

(i) Wir zeigen $r \geqslant N$ per Widerspruch. Angenommen, es gibt einen Unterraum $U \leqslant V$ mit $\dim(U) > r$ und $u^*Au > 0$ für alle $u \in U \setminus \{0\}$. Sei $U' = \operatorname{span}(v_{r+1}, \dots v_n)$. Zeigen Sie, dass $U \cap U' \neq \{0\}$.

(j) Sei $x \in (U \cap U') \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass $\langle x, x \rangle \leqslant 0$, und erklären Sie, warum das ein Widerspruch ist. Folgern Sie, dass $r = N$.

(k) Indem Sie A durch $-A$ ersetzen und das bereits bewiesene anwenden, zeigen Sie die obige Formel für s.

Lösung:

(a) Es gilt

$$0 = \langle e_i, e_j \rangle = e_j^* A e_i = a_{ji}.$$

Daher ist A die Nullmatrix und somit bereits in der behaupteten Diagonalform.

(b) Es gilt aufgrund der Sesquilinearität

$$\begin{aligned}\langle u+v, u+v \rangle - \langle u-v, u-v \rangle &= 2\langle u, v \rangle + 2\langle v, u \rangle = 2(\langle u, v \rangle + \overline{\langle u, v \rangle}) \\ &= 4\operatorname{Re}(\langle u, v \rangle).\end{aligned}$$

Die gleiche Rechnung zeigt, dass

$$\langle u+\mathrm{i}v, u+\mathrm{i}v \rangle - \langle u-\mathrm{i}v, u-\mathrm{i}v \rangle = 4\operatorname{Re}(\langle u, \mathrm{i}v \rangle) = 4\operatorname{Re}(-\mathrm{i}\langle u, v \rangle) = 4\operatorname{Im}(\langle u, v \rangle).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}(\langle u+v, u+v \rangle - \langle u-v, u-v \rangle + \mathrm{i}(\langle u+\mathrm{i}v, u+\mathrm{i}v \rangle - \langle u-\mathrm{i}v, u-\mathrm{i}v \rangle)) \\ &= \operatorname{Re}(\langle u, v \rangle) + \mathrm{i}\operatorname{Im}(\langle u, v \rangle) = \langle u, v \rangle.\end{aligned}$$

(c) Die oben bewiesene Darstellung zeigt, dass $\langle u, v \rangle$ als Kombination von Termen der Form $\langle w, w \rangle$ geschrieben werden kann. Wenn letztere alle verschwinden, so verschwindet also $\langle u, v \rangle$, was wir ausgeschlossen haben.

(d) Es gilt

$$\langle x, x \rangle = \frac{\langle w, w \rangle}{|\langle w, w \rangle|} \in \{-1, 1\},$$

da $\langle w, w \rangle \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(e) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_x \colon \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C} \\ y &\mapsto \langle x, y\rangle \end{aligned}$$

ist linear und nicht null, da $\varphi_x(x) = \langle x, x\rangle \neq 0$. Also ist φ_x surjektiv, denn $\mathbb{C}$ hat Dimension 1 als $\mathbb{C}$-Vektorraum. Weiterhin ist $W = \ker(\varphi_x)$, also gilt aufgrund des Dimensionssatzes $\dim(W) = n - 1$. Da $x \notin W$ folgt

$$\mathbb{C}^n = W \oplus \operatorname{span}(\{x\}).$$

(f) Die Matrix C^*AC ist hermitesch, denn

$$(C^*AC)^* = C^*A^*(C^*)^* = C^*AC,$$

da $A^* = A$. Also genügt es zu zeigen, dass die erste Spalte von C^*AC aus dem Eintrag $\langle x, x\rangle$, gefolgt von Nullen besteht. Der Eintrag (i, j) von C^*AC ist durch $e_i^*C^*ACe_j$ gegeben, also gilt für $j \geqslant 2$

$$\begin{aligned} e_1^*C^*ACe_1 &= (Ce_1)^*ACe_1 = x^*Ax = \langle x, x\rangle, \\ e_j^*C^*ACe_1 &= w_j^*Ax = \langle x, w_j\rangle = 0. \end{aligned}$$

(g) Da C^*AC hermitesch ist, ist auch A' hermitesch. Nach Induktionsvorraussetzung existiert eine invertierbare Matrix C' der Dimension $n - 1$, sodass $(C')^*A'C'$ eine Diagonalmatrix mit Einträgen 1, -1 und 0 ist. Wir setzen

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{n-1}^T \\ 0_{n-1} & C' \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\tilde{C}$ invertierbar, und es gilt

$$\tilde{C}^*C^*AC\tilde{C} = \begin{pmatrix} \langle x, x\rangle & 0_{n-1}^T \\ 0_{n-1} & (C')^*A'C' \end{pmatrix}.$$

Da $\langle x, x\rangle \in \{-1, 1\}$ ergibt das, eventuell nach einem Tausch von Zeilen und Spalten, die gewünschte Form.

(h) Es gilt $Be_i = v_i$. Sei $w = \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i \in W \setminus \{0\}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} w^*Aw &= \sum_{i=1}^r \alpha_i\bar{\alpha}_i v_i^*Av_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^r \bar{\alpha}_i\alpha_j v_i^*Av_j \\ &= \sum_{i=1}^r |\alpha_i|^2 \underbrace{e_i^*BABe_i}_{=1} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^r \bar{\alpha}_i\alpha_j \underbrace{e_i^*BABe_j}_{=0} \\ &= \sum_{i=1}^r |\alpha_i|^2 > 0, \end{aligned}$$

da ein $\alpha_i \neq 0$ existiert. Da W ein Unterraum der Dimension r ist, der die Bedingung in der Definition von N erfüllt, folgt $r \leqslant N$.

(i) Da $\dim(U) \leqslant N \leqslant n$ folgt insbesondere, dass $r < n$. Beachte, dass $\dim(U') = n - r$. Aus dem Dimensionssatz folgt also

$$\dim(U \cap U') = \dim(U') + \dim(U) - \dim(U \oplus U') > r + n - r - n = 0,$$

denn $\dim(U \oplus U') \leqslant n$ und $\dim(U) > r$.

(j) Da $x \in U' \smallsetminus \{0\}$ können wir $x = \sum_{i=r+1}^{n} \beta_i v_i$ schreiben. Nun führen wir die gleiche Rechnung wie in W oben durch. Der einzige Unterschied besteht darin, dass

$$e_i^* B^* A B e_i \in \{-1, 0\}$$

für $i \geqslant r+1$ gilt. Also folgt

$$\langle x, x \rangle \leqslant 0.$$

Da $x \in U \smallsetminus \{0\}$ widerspricht dies der Definition von U. Also kann ein Unterraum mit den Eigenschaften von U nicht existieren, und das zeigt, dass $r \geqslant N$. Mit dem vorherigen Punkt folgt also $r = N$, wie behauptet.

(k) Ersetzen wir A durch $-A$, so vertauscht dies die Rollen von r und s. Die Bedingung

$$u^*(-A)u > 0$$

ist äquivalent zu

$$u^* A u < 0,$$

und da das r für $-A$ die oben behauptete Form hat, hat also das s für A auch die behauptete Form.

8. Sei $A \in \mathrm{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$. Wir bezeichnen die linke obere $(k \times k)$-Teilmatrix von A als $A^{(k)}$. Die *Hauptminoren* von A sind die Werte $\det(A^{(k)})$ für $k = 1, \ldots, n$. Sei A hermitesch. Dann ist A genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren von A positiv sind. Diese Aussage bezeichnet man als *Hauptminorenkriterium.*

(a) Es sei zunächst A positiv definit. Zeigen Sie, dass $A^{(k)}$ für alle $k = 1, \ldots, n$ hermitesch und positiv definit ist.

(b) Es sei $1 \leqslant k \leqslant n$. Wir wählen eine invertierbare Matrix B_k und eine Diagonalmatrix D_k wie im Trägheitssatz von Sylvester, sodass $D_k = B_k^* A^{(k)} B_k$. Zeigen Sie, dass D_k positiv definit ist, und folgern Sie, dass alle Diagonaleinträge von D_k gleich 1 sind.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\det(B_k^*) = \overline{\det(B_k)}$$

und folgern Sie, dass $\det(A^{(k)}) > 0$.

(d) Nun nehmen wir umgekehrt an, dass alle Hauptminoren positiv sind. Für $1 \leqslant k \leqslant n$ sei

$$V_k = \mathrm{span}(\{e_1, \ldots, e_k\}).$$

Wir zeigen durch Induktion nach k, dass die Einschränkung von A auf V_k positiv definit ist. Da $V_n = \mathbb{C}^n$ folgt daraus, dass A positiv definit ist. Zeigen Sie den Basisfall $k = 1$.

(e) Nun sei $1 < k \leqslant n$ und bereits bewiesen, dass A auf V_{k-1} eingeschränkt positiv definit ist. Zeigen Sie, dass $\det(D_k) > 0$.

(f) Zeigen Sie, unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung, sowie der Formel für r aus dem Trägheitssatz von Sylvester, dass alle Diagonaleinträge von D_k gleich 1 sind.

(g) Folgern Sie, dass A auf V_k eingeschränkt positiv definit ist, was den Beweis vollendet.

Lösung:

(a) Es ist klar, dass $A^{(k)}$ hermitesch ist. Ist $v \in \mathbb{C}^k$, und erweitern wir v mit Nullen zu einem Vektor $\tilde{v} \in \mathbb{C}^n$, so folgt

$$v^* A^{(k)} v = \tilde{v}^* A \tilde{v}.$$

Ist A also positiv definit, so auch $A^{(k)}$.

(b) Für $v \in C^k \setminus \{0\}$ ist auch $B_k v \in \mathbb{C}^k \setminus \{0\}$, da B_k invertierbar ist. Daraus folgt nun

$$v^* D_k v = (B_k v)^* A^{(k)} B_k v > 0,$$

da $A^{(k)}$ positiv definit ist. Also ist auch D_k positiv definit. Insbesondere gilt $e_i^* D_k e_i > 0$, und das ist genau der i-te Diagonaleintrag von D_k. Da die Diagonaleinträge von D_k entweder -1, 0 oder 1 sind, müssen alle Diagonaleinträge gleich 1 sein.

(c) Wir wissen bereits, dass die Determinante durch Transposition nicht verändert wird. Also gilt

$$\det(B_k^*) = \det(\overline{B_k}).$$

Da komplexe Konjugation mit Multiplikation und Summen kommutiert, folgt aus der Leibnitzformel für die Determinante, dass

$$\det(\overline{B_k}) = \overline{\det(B_k)}.$$

Es gilt also

$$1 = \det(D_k) = \det(B_k^*) \det(B_k) \det(A^{(k)}) = \underbrace{|\det(B_k)|^2}_{>0} \det(A^{(k)}),$$

und daher $\det(A^{(k)}) > 0$.

(d) Jeder Vektor in V_1 ist ein skalares Vielfaches von e_1. Es genügt also zu zeigen, dass $e_1^* A e_1 > 0$. Das ist genau der Eintrag an der Stelle $(1,1)$ von A, also die Determinante von $A^{(1)}$, und dieser Wert ist nach Voraussetzung positiv.

(e) Wie oben sehen wir, dass

$$\det(D_k) = |\det(B_k)|^2 \det(A^{(k)}) > 0.$$

(f) Wir beobachten, dass die Einschränkung von A auf V_{k-1} mit der Einschränkung von $A^{(k)}$ auf V_{k-1} übereinstimmt (wenn wir $A^{(k)}$ um Nullspalten und Nullzeilen zu einer Matrix der Dimension n erweitern). Also ist $A^{(k)}$ auf V_{k-1} positiv definit. Mit der Notation aus dem Trägheitssatz von Sylvester folgt, dass $r \geqslant k-1$ ist, denn $\dim(V_{k-1}) = k-1$. Also hat D_k mindestens $(k-1)$-mal den Eintrag 1 auf der Diagonale. Da die Determinante von D_k genau das Produkt der Diagonaleinträge ist, muss der letzte Diagonaleintrag also auch 1 sein.

(g) Die Einschränkung von A auf V_k ist genau $A^{(k)}$. Beachte, dass D_k positiv definit ist, denn D_k hat k-mal den Eintrag 1 auf der Diagonale. Nach dem Trägheitssatz von Sylvester ist das r für D_k also genau k, und somit ist D_k auf einem Unterraum der Dimension k positiv definit. Das ist aber ganz V_k. Nun ist

$$A^{(k)} = (B_k^{-1})^* D_k B_k^{-1},$$

und analog zu oben folgt, dass $A^{(k)}$ positiv definit ist.