Serie 22

Adjungierte Abbildung, Selbstadjungierten und normalen Operatoren

Definition. Ein linear Operator $T : V \to V$ heißt selbstadjungiert, wenn $T = T^*$. Anders ausgedrückt ist $T \in \mathrm{Hom}(V)$ selbstadjungiert genau dann, wenn

$$\langle Tv, w\rangle = \langle v, Tw\rangle$$

für alle $v, w \in V$ gilt.

1. Es seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ und $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ IP Räume über einem Körper $\mathbb{K}$, und es sei $T : V \to W$ linear. Zeige, dass

$$\mathrm{Bild}(T^*) = \ker(T)^\perp \text{ and } \mathrm{Bild}(T) = \ker(T^*)^\perp.$$

2. Seien V und W wie oben. Nehme an, dass $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Zeige, dass
   (a) T genau dann injektiv ist, wenn T^* surjektiv ist.
   (b) T genau dann surjektiv ist, wenn T^* injektiv ist.

3. Sei K ein Körper und sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler K-Skalarproduktraum. Betrachte $T \in \mathrm{End}(V)$ und einen Unterraum U von V. Zeige, dass U invariant unter T ist genau dann wenn $U^\perp$ invariant unter T^* ist.

4. (a) Geben Sie ein Beispiel für einen Operator $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^2)$ an, der nicht normal ist. Erklären Sie sorgfältig, warum es sich nicht um einen normalen Operator handelt.
   (b) Geben Sie ein Beispiel für einen diagonalisierbaren Operator $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^2)$ an, der nicht normal ist.
   (c) Geben Sie ein Beispiel für einen Operator $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^3)$ an, der normal, aber nicht selbstadjungiert ist.
   (d) Geben Sie ein Beispiel für einen Operator $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2)$ an, der diagonalisierbar, aber nicht selbstadjungiert ist.
   (e) Überprüfen Sie, ob der Operator

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v \end{aligned}$$

   normal ist. Erklären Sie, warum er nicht selbstadjungiert ist.

5. Sei $\mathbb{R}^2$ mit dem Skalarprodukt ausgestattet

$$\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2,\ \ x, y \in \mathbb{R}^2.$$

   (a) Definieren Sie einen selbstadjungierten Operator T auf dem Skalarproduktraum $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit Eigenwerten $\sqrt{2}, 1$.

   (b) Ist der lineare Operator

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & v & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v \end{array}$$

   ein selbstadjungierter Operator auf dem Skalarproduktraum $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$?

6. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit IP. Fixiere $u, x \in V$. Definiere $T \in \mathrm{Hom}(V)$ durch

$$Tv = \langle v, u\rangle x$$

   für jedes $v \in V$.

   (a) Angenommen, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass T genau dann selbstadjungiert ist, wenn $\{u, x\}$ linear abhängig ist.

   (b) Zeigen Sie, dass T genau dann normal ist, wenn $\{u, x\}$ linear abhängig ist.