

Serie 23

ISOMETRIEN, SINGULÄRWERTZERLEGUNG

Definition. Ein linear Operator $T : V \rightarrow V$ heißt selbstadjungiert, wenn $T = T^*$. Anders ausgedrückt ist $T \in \text{Hom}(V)$ selbstadjungiert genau dann, wenn

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle$$

für alle $v, w \in V$ gilt.

1. Gegeben sei die reelle Matrix

$$A := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeige, dass A orthogonal und $\det A = 1$ ist.
 - (b) Bestimme die Drehachse und den Drehwinkel von $T_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, v \mapsto Av$.
2. Zeige: Für jeden orthogonalen Endomorphismus f eines n -dimensionalen euklidischen Vektorraumes V gilt

$$|\text{Tr}(f)| \leq n.$$

Für welche f gilt Gleichheit?

3. Betrachten Sie zwei zweidimensionale Teilräume $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^3$. Beschreiben Sie die Menge der Elemente $T \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$, so dass

$$TE_1 = E_2$$

gilt, in Bezug auf orthogonale Basen von E_1 und E_2 .

Hinweis: Gehen Sie zunächst davon aus, dass $E_1 = E_2 = \text{Sp}(e_1, e_2)$ ist.

4. Angenommen, $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3)$ und 5, 7 sind Eigenwerte von T . Beweisen Sie, dass $T_{\mathbb{C}}$ keine nicht-reellen Eigenwerte hat.
5. Seien V und W endlichdimensionale unitäre Vektorräume und sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Die Singulärwerte von f sind definiert als die Quadratwurzeln der positiven Eigenwerte von $f^* \circ f$.

Zeige: Eine Zahl $\sigma \in \mathbb{R}^{>0}$ ist ein Singulärwert von f genau dann, wenn gilt:

$$\exists v \in V \setminus \{0\}, \exists w \in W \setminus \{0\} : f(v) = \sigma w \wedge f^*(w) = \sigma v.$$

6. Bestimme eine Singulärwertzerlegung $A = QDR$ der komplexen Matrix

$$A := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3+2i & i & 0 \\ -i & 3+2i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}.$$

*7. *Beispiel zur speziellen Relativitätstheorie.* Definiere die symmetrische Bilinearform $s: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ für alle $v = (x, y, z, t)^T$ und $v' = (x', y', z', t')^T$ in $\mathbb{R}^4$ durch

$$s(v, v') := xx' + yy' + zz' - ctt',$$

wobei $c > 0$ ein fester Parameter ist. Der Raum $M := (\mathbb{R}^4, s)$ heisst die *Minkowski-Raumzeit* und der Parameter c heisst die *Lichtgeschwindigkeit*. Wir werden die Normalisierung $c = 1$ verwenden.

Eine lineare Abbildung $F: M \rightarrow M$ heisst eine *Isometrie* oder eine *Lorentztransformation*, falls gilt

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^4: s(F(v), F(w)) = s(v, w).$$

(a) Beweise, dass jede Isometrie bijektiv ist.

(b) Beweise, dass die folgenden Endomorphismen Isometrien von M sind:

(i) Die Linksmultiplikation mit $\left(\begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline 0 & \pm 1 \end{array} \right)$ für jedes $T \in O(3)$.

(ii) Ein *Lorentzboost* in x -Richtung mit der Geschwindigkeit $v < c = 1$, gegeben durch Linksmultiplikation mit der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} \gamma & & & -v\gamma \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -v\gamma & & & \gamma \end{pmatrix}$$

für $\gamma := 1/\sqrt{1-v^2}$.

** (c) Die Teilmenge $\{x \in M \mid s(x, x) = 0\}$ heisst der *Lichtkegel* in M . Beweise den „relativistischen Satz vom Fussball“: Jede lineare Isometrie φ mit $\det(\varphi) = 1$ besitzt einen Eigenvektor, der im Lichtkegel liegt.

Bemerkung. Für $c \rightarrow \infty$ nähert sich der Lichtkegel dem Unterraum $\{t = 0\}$ an und die Aussage reduziert sich auf den klassischen Fall.