# Musterlösung Serie 23

ISOMETRIEN, SINGULÄRWERTZERLEGUNG

**Definition.** Ein linear Operator $T : V \to V$ heißt selbstadjungiert, wenn $T = T^*$. Anders ausgedrückt ist $T \in \mathrm{Hom}(V)$ selbstadjungiert genau dann, wenn

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle$$

für alle $v, w \in V$ gilt.

1. Gegeben sei die reelle Matrix

$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeige, dass $A$ orthogonal und $\det A = 1$ ist.

   (b) Bestimme die Drehachse und den Drehwinkel von $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto Av$.

   *Lösung*:

   (a) Durch direktes Ausrechnen zeigt man $A^T A = I_3$ und $\det A = 1$.

   (b) Nach dem Satz vom Fussball ist die Abbildung $L_A$ eine Drehung. Die Drehachse ist enthalten im Eigenraum von $A$ zum Eigenwert 1, den wir bestimmen als

$$\mathrm{Eig}_{1,A} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

   Weiter existiert eine geordnete Orthonormalbasis $B$ mit

$${}_B[A]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

   für einen Drehwinkel $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Es folgt

$$1 + 2\cos\varphi \;=\; \mathrm{Spur}\ {}_B[A]_B \;=\; \mathrm{Spur}\ A \;=\; -\frac{2}{3},$$

   also

$$\varphi \;=\; \arccos(-5/6) \;=\; \pi - \arccos(5/6) \;\approx\; 146.44^\circ.$$

*Aliter*: Nachdem die Rotationsachse bestimmt wurde, bestimme einen dazu orthogonalen Vektor, zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sein Bild $w := Av$ ist also auch in der Ebene, welche orthogonal zur Rotationsache ist, enthalten. Wir können den Winkel $\varphi$ berechnen durch

$$\varphi = \arccos(\cos(\varphi)) = \arccos\left(\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}\right).$$

2. Zeige: Für jeden orthogonalen Endomorphismus $f$ eines $n$-dimensionalen euklidischen Vektorraumes $V$ gilt

$$|\operatorname{Tr}(f)| \leqslant n.$$

Für welche $f$ gilt Gleichheit?

*Lösung*: Wir bemerken zunächst, dass $\operatorname{Tr}(f) = \operatorname{Tr}(A)$ für jede Darstellungsmatrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ von $f$ bezüglich einer Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ gilt. Wir zeigen, dass $A$ dann orthogonal ist, also $A^T A = I_n = AA^T$. Da für ein Paar $u, v \in V$ die Gleichung $\langle fu, fv\rangle = \langle u, v\rangle$ gilt, erhalten wir

$$(Au)^T M(Av) = u^T A^T MAv = u^T Mv,$$

wobei $M$ die Darstellungsmatrix des inneren Produkts bezüglich $\mathcal{B}$ ist. Da die vorherige Aussage für jedes Paar $u, v \in V$ gilt, erhalten wir

$$A^T MA = M.$$

Da $\mathcal{B}$ orthonormal ist, folgt $M = I_n$. Also ist $A^T A = I_n$. Wir schliessen, dass die Spalten von $A$ eine Orthonormalbasis von $V$ bilden. Insbesondere hat jeder Diagonaleintrag $a_{ii}$ von $A$ Norm kleinergleich 1. Daraus folgt

$$\operatorname{Tr}(f) = \operatorname{Tr}(A) \leqslant n.$$

Gleichheit gilt genau dann wenn jeder Diagonaleintrag Norm 1 hat und wenn alle diese Einträge das selbe Vorzeichen haben, also wenn $A = \pm I_n$ ist. Tatsächlcih ist $f$ in diesen Fällen $\pm$ die Identität.

*Aliter*: Nach dem Spektralsatz existiert eine geordnete Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von $V$, so dass die Darstellungsmatrix von $f$ bezüglich $\mathcal{B}$ die Form

$$[M_f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_r \end{pmatrix}$$

hat, wobei $D_k$ gleich $\pm 1$ oder gleich $\left(\begin{smallmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{smallmatrix}\right)$ ist mit $a_k^2 + b_k^2 = 1$.

Im ersten Fall gilt $|\operatorname{Tr}(D_k)| = 1$ und im zweiten Fall $|\operatorname{Tr}(D_k)| = |2a_k| \leqslant 2$. Zusammen gilt daher

$$|\operatorname{Tr}(f)| = |\sum_{k=1}^{r} \operatorname{Tr}(D_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{r} |\operatorname{Tr}(D_k)| \leqslant n.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn für alle $D_k$ vom zweiten Typ $|\operatorname{Tr}(D_k)| = 2$ gilt und wenn alle Diagonaleinträge von $[M_f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ das gleiche Vorzeichen besitzen. Dies ist genau dann der Fall, wenn $f = \pm \mathrm{id}_V$ ist.

*Aliter ohne Spektralsatz:* Sei $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine beliebige geordnete Orthonormalbasis von $V$. Für jedes $1 \leqslant j \leqslant n$ gilt dann

$$f(b_j) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \langle b_i, f(b_j) \rangle \cdot b_i.$$

Somit hat $f$ die Darstellungsmatrix $[M_f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = (\langle b_i, f(b_j) \rangle)_{ij}$. Daraus folgt

$$\operatorname{Tr}(f) \;=\; \operatorname{Tr}([M_f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \langle b_i, f(b_i) \rangle.$$

Da $f$ orthogonal ist, gilt für jedes $i$ nun aber $\|b_i\| = \|f(b_i)\| = 1$. Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung haben wir daher

$$|\langle b_i, f(b_i) \rangle| \leqslant \sqrt{\|b_i\|^2 \, \|f(b_j)\|^2} = 1.$$

Durch Aufsummieren folgt daraus $|\operatorname{Tr}(f)| \leqslant n$, wie gewünscht.

Ausserdem gilt $|\operatorname{Tr}(f)| = n$ genau dann, wenn die reellen Zahlen $\langle b_i, f(b_i) \rangle$ alle gleich 1 oder alle gleich $-1$ sind. In diesem Fall haben wir für jedes $i$ auch Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, und daher ist $f(b_i)$ linear abhängig von $b_i$. Somit ist $f(b_i) = b_i$ für alle $i$, oder $f(b_i) = -b_i$ für alle $i$, also $f = \pm \mathrm{id}_V$.

3. Betrachten Sie zwei zweidimensionale Teilräume $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^3$. Beschreiben Sie die Menge der Elemente $T \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, so dass

$$TE_1 = E_2$$

gilt, in Bezug auf orthogonale Basen von $E_1$ und $E_2$.

*Hinweis*: Gehen Sie zunächst davon aus, dass $E_1 = E_2 = \mathrm{Sp}(e_1, e_2)$ ist.

*Solution*: Zunächst bestimmen wir zwei Orthonormalbasen $v_1, v_2, v_3$ und $w_1, w_2, w_3$ von $\mathbb{R}^3$ mit $v_1, v_2 \in E_1$ und $w_1, w_2 \in E_2$. Dies liefert orthogonale Matrizen $M_1 :=$

$(v_1 v_2 v_3)$ und $M_2 := (w_1 w_2 w_3)$. Diese haben Determinante $\pm 1$ , und nach etwaigem Ersetzen von $v_3$ durch $-v_3$, beziehungsweise von $w_3$ durch $-w_3$, können wir erreichen, dass $\det(M_1) = \det(M_2) = 1$ ist.

Sodann erinnern wir uns daran, dass die Drehungen von $\mathbb{R}^3$ die Gruppe $\mathrm{SO}(3)$ aller orthogonalen Matrizen mit Determinante 1 bilden. Insbesondere ist jede Komposition von Drehungen und die Inverse jeder Drehung wieder eine Drehung, und nach Konstruktion sind $M_1$ und $M_2$ Drehungen.

Sei nun $E_0$ der von den Standardbasisvektoren $e_1, e_2$ aufgespannte Unterraum. Nach Konstruktion gilt dann $M_1 E_0 = E_1$ und $M_2 E_0 = E_2$. Für eine beliebige Drehung $T$ gilt dann

$$TE_1 = E_2 \Longleftrightarrow TM_1E_0 = M_2E_0 \quad \Longleftrightarrow \quad M_2^{-1}TM_1E_0 = E_0.$$

Also ist $D := M_2^{-1}TM_1$ eine Drehung mit $DE_0 = E_0$, und $T = M_2 D M_1^{-1}$. Es bleibt daher, alle Drehungen $D$ mit $DE_0 = E_0$ zu bestimmen. Eine solche Drehung muss auch das orthogonale Komplement von $E_0$ in sich abbilden. Dieses ist von dem Standardbasisvektor $e_3$ erzeugt. Wegen $\|De_3\| = \|e_3\| = 1$ muss dann $De_3 = \pm e_3$ sein.

Im Fall $De_3 = e_3$ ist $D$ eine Drehung um die Achse $\mathbb{R}e_3$, und alle solchen sind gegeben durch die Matrizen

$$D_\varphi := \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für $(a, b) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$. Sodann ist

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eine Drehung mit $SE_0 = E_0$ und $Se_3 = -e_3$. Im Fall $De_3 = -e_3$ ist daher $S^{-1}D$ eine Drehung mit $S^{-1}DE_0 = E_0$ und $S^{-1}De_3 = e_3$. Somit ist $S^{-1}D = D_\varphi$ für ein $\varphi$ und damit $D = SD_\varphi$. Die Menge aller Drehungen $D$ mit $DE_0 = E_0$ ist daher

$$\{D_\varphi \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \cup \{SD_\varphi \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$$

Die Menge aller Drehungen $T$ mit $TE_1 = E_2$ ist also schlussendlich

$$\left\{M_2 D_\varphi M_1^{-1} \mid \varphi \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{M_2 S D_\varphi M_1^{-1} \mid \varphi \in \mathbb{R}\right\}.$$

4. Angenommen, $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3)$ und $5, 7$ sind Eigenwerte von $T$. Beweisen Sie, dass $T_\mathbb{C}$ keine nicht-reellen Eigenwerte hat.

   *Lösung*: Da $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3)$, hat das Polynom $\chi_T(x) = \chi_{T_\mathbb{C}}(x)$ reelle Koeffizienten. Daher, wenn $T$ einen weiteren nicht-reellen Eigenwert $\lambda$ hätte, wäre $\overline{\lambda} \neq \lambda$ auch ein Eigenwert von $T_\mathbb{C}$. Somit hätte $T_\mathbb{C}$ 4 Eigenwerte. Aber $\dim_\mathbb{C}((\mathbb{R}^3)_\mathbb{C}) = 3$, was zu einem Widerspruch führt.

5. Seien $V$ und $W$ endlichdimensionale unitäre Vektorräume und sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Die Singulärwerte von $f$ sind definiert als die Quadratwurzeln der positiven Eigenwerte von $f^* \circ f$.

   Zeige: Eine Zahl $\sigma \in \mathbb{R}^{>0}$ ist ein Singulärwert von $f$ genau dann, wenn gilt:

$$\exists\, v \in V \smallsetminus \{0\},\ \exists\, w \in W \smallsetminus \{0\} \colon f(v) = \sigma w \ \wedge\ f^*(w) = \sigma v\,.$$

   *Lösung*:

   ($\Rightarrow$) Sei $\sigma$ ein Singulärwert von $f$. Dann gibt es einen Vektor $v \in V \smallsetminus \{0\}$ mit $f^*(f(v)) = \sigma^2 v$. Für $w := f(v)/\sigma$ folgt also

$$f(v) = \sigma w \qquad \text{und} \qquad f^*(w) = f^*(f(v))/\sigma = \sigma v\,.$$

   ($\Leftarrow$) Sei $\sigma > 0$ und seien $v \in V \smallsetminus \{0\}$ und $w \in W \smallsetminus \{0\}$ mit $f(v) = \sigma w$ und $f^*(w) = \sigma v$. Wegen $f^* f(v) = f^*(\sigma w) = \sigma^2 v$ ist $\sigma^2$ ein Eigenwert von $f^* f$, also $\sqrt{\sigma^2} = \sigma$ ein Singulärwert von $f$.

6. Bestimme eine Singulärwertzerlegung $A = QDR$ der komplexen Matrix

$$A := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3+2i & i & 0 \\ -i & 3+2i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}.$$

   *Lösung*: Wir berechnen $A^*A$ und erhalten

$$A^*A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 14 & 6i & 0 \\ -6i & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Wegen dem Eintrag unten rechts besitzt $A^*A$ einen Eigenwert 1. Um die anderen Eigenwerte zu bestimmen berechnen wir das charakteristische Polynom der oberen linken $2 \times 2$-Matrix. Dieses ist $(X - \frac{14}{4})(X - \frac{14}{4}) + \frac{(6i)^2}{16} = X^2 - 7X + 10 = (X-5)(X-2)$. Also hat $A^*A$ die Eigenwerte 5, 2 und 1. Daraus schliessen wir, dass $A$ die Singulärwerte $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$ und 1 besitzt und die Matrix $D$ gleich

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   ist. Die normierten Eigenvektoren von $A^*A$ zu den Eigenwerten 5 bzw. 2 bzw. 1 sind

$$u_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Eigenvektoren sind die Spalten der Matrix $R^*$, also ist

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $Q$ finden wir durch Lösen der Matrixgleichung $AR^* = QD$. Wir finden

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2+i}{\sqrt{10}} & \frac{1+i}{2} & 0 \\ \frac{1-2i}{\sqrt{10}} & \frac{i-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir schliesslich die Singulärwertzerlegung

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3+2i & i & 0 \\ -i & 3+2i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+i}{\sqrt{10}} & \frac{1+i}{2} & 0 \\ \frac{1-2i}{\sqrt{10}} & \frac{i-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*7. *Beispiel zur speziellen Relativitätstheorie.* Definiere die symmetrische Bilinearform $s\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ für alle $v = (x, y, z, t)^T$ und $v' = (x', y', z', t')^T$ in $\mathbb{R}^4$ durch

$$s(v, v') := xx' + yy' + zz' - ctt',$$

wobei $c > 0$ ein fester Parameter ist. Der Raum $M := (\mathbb{R}^4, s)$ heisst die *Minkowski-Raumzeit* und der Parameter $c$ heisst die *Lichtgeschwindigkeit.* Wir werden die Normalisierung $c = 1$ verwenden.

Eine lineare Abbildung $F : M \to M$ heisst eine *Isometrie* oder eine *Lorentztransformation*, falls gilt

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^4 \colon\ s\big(F(v), F(w)\big) = s(v, w)\,.$$

(a) Beweise, dass jede Isometrie bijektiv ist.

(b) Beweise, dass die folgenden Endomorphismen Isometrien von $M$ sind:

(i) Die Linksmultiplikation mit $\left(\begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline 0 & \pm 1 \end{array}\right)$ für jedes $T \in O(3)$.

(ii) Ein *Lorentzboost* in $x$-Richtung mit der Geschwindigkeit $v < c = 1$, gegeben durch Linksmultiplikation mit der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} \gamma & & & -v\gamma \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -v\gamma & & & \gamma, \end{pmatrix}$$

für $\gamma := 1/\sqrt{1 - v^2}$.

**(c) Die Teilmenge $\{x \in M \mid s(x,x) = 0\}$ heisst der *Lichtkegel in $M$*. Beweise den „relativistischen Satz vom Fussball“: Jede lineare Isometrie $\varphi$ mit $\det(\varphi) = 1$ besitzt einen Eigenvektor, der im Lichtkegel liegt.

*Bemerkung.* Für $c \to \infty$ nähert sich der Lichtkegel dem Unterraum $\{t = 0\}$ an und die Aussage reduziert sich auf den klassischen Fall.

*Lösung*:

(a) Sei $F\colon M \to M$ eine Isometrie, und sei $v = (x_1, \ldots, x_4)^T$ ein beliebiges Element im Kern von $F$. Bezeichne mit $e_1, \ldots, e_4$ die Standard-Basis von $M = \mathbb{R}^4$. Dann gilt für alle $i = 1, \ldots, 4$

$$\pm x_i \;=\; s(v, e_i) \;=\; s(F(v), F(e_i)) \;=\; s(0, e_i) \;=\; 0,$$

also $v = 0$. Somit ist $\mathrm{Kern}(F) = \{0\}$, und als Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums ist $F$ daher bijektiv.

(b) (i) Folgt durch direktes Nachrechnen.

(ii) Für alle $v = (x, y, z, t)^T$ und $v' = (x', y', z', t')^T$ in $M$ gilt

$$\begin{aligned} s(Bv, Bv') &= (\gamma x - v\gamma t)(\gamma x' - v\gamma t') + yy' + zz' - (-v\gamma x + \gamma t)(-v\gamma x' + \gamma t') \\ &= (\gamma^2 - v^2\gamma^2)xx' + yy' + zz' - (\gamma^2 - v^2\gamma^2)tt' \\ &= xx' + yy' + zz' - tt' \\ &= s(v, w)\,, \end{aligned}$$

also ist der Lorentzboost $L_B$ eine Isometrie.

(c) Sei $\varphi : M \to M$ eine lineare Isometrie mit $\det(\varphi) = 1$.

**Schritt 1:** Es existiert ein $\varphi$-invarianter Unterraum $U$ der Dimension 2.

**Beweis:** Jeder irreduzible Faktor des charakteristischen Polynoms von $\varphi$ hat den Grad 1 oder 2. Falls ein irreduzibler Faktor vom Grad 2 existiert, können wir die Jordan-Normalform von $\varphi$ schreiben mit einem $2 \times 2$-Block links oben. Andernfalls haben alle irreduziblen Faktoren den Grad 1 und die Jordan-Normalform von $\varphi$ ist eine obere Dreiecksmatrix. In beiden Fällen erzeugen die ersten beiden Basisvektoren einen $\varphi$-invarianten Unterraum der Dimension 2. $\square$

**Schritt 2:** Das „orthogonale Komplement“

$$U^\perp = \{v \in M \mid \forall u \in U\colon s(u, v) = 0\}$$

ist ebenfalls ein $\varphi$-invarianter Unterraum der Dimension 2.

**Beweis:** Genauso wie im Fall eines Skalarprodukts, da $s$ nicht entartet ist. $\square$

**Schritt 3:** Es gilt $U \subsetneqq U^\perp$.

**Beweis:** Die Einschränkung von $s$ auf den durch $t = 0$ definierten Unterraum $V$ ist positiv definit. Ausserdem ist

$$\begin{aligned}\dim(U \cap V) &= \dim(U) + \dim(V) - \dim(U + V) \\ &\geqslant \dim(U) + \dim(V) - \dim(M) \;=\; 2 + 3 - 4 \;= 1.\end{aligned}$$

Also existiert ein von Null verschiedener Vektor $u \in U \cap V$, und für diesen ist $s(u, u) > 0$. Somit ist $u \notin U^\perp$.

**Schritt 4:** Beweis im Fall $U \cap U^\perp \neq 0$.

**Beweis:** Nach Schritt 1 und 2 ist $U \cap U^\perp$ wieder ein $\varphi$-invarianter Unterraum, und nach Schritt 3 hat er jetzt die Dimension 1. Jeder von Null verschiedene Vektor $u$ darin ist daher ein Eigenvektor von $\varphi$. Nach Definition von $U^\perp$ erfüllt er ausserdem $s(u, u) = 0$, wie gewünscht. $\square$

Ab jetzt nehmen wir $U \cap U^\perp = 0$ an. Dann gilt $M = U \oplus U^\perp$.

**Schritt 5:** Nach allfälligem Vertauschen von $U$ und $U^\perp$ können wir annehmen, dass $s$ auf $U$ positiv definit und auf $U^\perp$ indefinit ist.

**Beweis:** Betrachte irgendeine geordnete Basis von $U$ und ergänze sie um geordnete Basis von $U^\perp$ zu einer Basis $B$ von $M$. Nach Definition von $U^\perp$ ist die Darstellungsmatrix $[s]_B$ dann eine Blockdiagonalmatrix mit Blöcken der Grösse 2. Die Signatur von $s$ ist daher die Summe der Signaturen von $s|_{U \times U}$ und $s|_{U^\perp \times U^\perp}$. Da $s$ die Signatur $(3, 1)$ hat, muss eine dieser Einschränkungen die Signatur $(2, 0)$ und die andere die Signatur $(1, 1)$ haben. $\square$

**Schritt 6:** Für die Einschränkungen der gegebenen Isometrie

$$\varphi_U := \varphi|_U : U \to U \qquad \text{und} \qquad \varphi_{U^\perp} := \varphi|_{U^\perp} : U^\perp \to U^\perp$$

gilt $\det(\varphi_U) = \det(\varphi_{U^\perp}) = \pm 1$.

**Beweis:** Die Einschränkung $\varphi_U$ ist eine Isometrie bezüglich des Skalarprodukts $s|_{U \times U}$, also ist $\det(\varphi_U) = \pm 1$. Andererseits ist nach Voraussetzung

$$\det(\varphi_U) \cdot \det(\varphi_{U^\perp}) \;=\; \det(\varphi) \;=\; 1$$

Zusammen folgt daraus $\det(\varphi_{U^\perp}) = \det(\varphi_U)$. $\square$

**Schritt 7:** Beweis im Fall $\det(\varphi_U) = \det(\varphi_{U^\perp}) = -1$.

**Beweis:** Hier ist $\varphi_U$ eine Isometrie des 2-dimensionalen euklidischen Vektorraums $U$ mit Determinante $-1$, also eine Spiegelung mit den Eigenwerten $+1$ und $-1$. Zum anderen ist $\varphi_{U^\perp}$ ein Endomorphismus des 2-dimensionalen reellen Vektorraums $U^\perp$ mit Determinante $-1$. Also zerfällt sein charakteristisches Polynom schon über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren, und daher existiert ein Eigenvektor $v \in U^\perp$, sagen wir zum Eigenwert $\lambda$. Ist $s(v,v) = 0$, so ist das schon der gesuchte Eigenvektor im Lichtkegel. Andernfalls zeigt die Rechnung

$$s(v,v) \;=\; s(\varphi(v),\varphi(v)) \;=\; s(\lambda v,\lambda v) \;=\; \lambda^2 \cdot s(v,v),$$

dass $\lambda = \pm 1$ sein muss. Wegen $\det(\varphi_{U^\perp}) = -1$ muss $\varphi_{U^\perp}$ dann auch den Eigenwert $-1/\lambda = \mp 1$ haben. Zusammen zeigt dies, dass $\varphi$ die Eigenwerte $\pm 1$ jeweils mit Vielfachheit 2 hat.

Beide Eigenräume sind dann $\varphi$-invariante Unterräume der Dimension 2. Nachdem wir $U$ und $U^\perp$ durch diese ersetzen, ist die Einschränkung $\varphi_{U^\perp}$ also skalar. Da aber $s|_{U^\perp \times U^\perp}$ indefinit ist, existiert ein Vektor $v \in U^\perp$ mit $s(v,v) = 0$. Dies ist der gesuchte Eigenvektor im Lichtkegel. $\square$

**Schritt 8:** Beweis im Fall $\det(\varphi_U) = \det(\varphi_{U^\perp}) = 1$.

**Beweis:** Da $s|_{U^\perp \times U^\perp}$ indefinit ist, existiert eine Basis $B$ von $U^\perp$ mit

$$[s|_{U^\perp \times U^\perp}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für die Darstellungsmatrix $A := {}_B[\varphi_{U^\perp}]_B$ gilt dann $A^T \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\det(A) = 1$. Durch eine direkte Rechnung zeigt man, dass diese Bedingungen äquivalent sind zu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 - b^2 = 1$. Der Spaltenvektor $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ entspricht daher einem Eigenvektor von $\varphi_{U^\perp}$ zum Eigenwert $a + b$ im Lichtkegel. $\square$