

Serie 24

TENSORPRODUKT

1. Sei $S_1 = \{1, x, 2x, x^2, \dots, x^k\}$ und $S_2 = \{1, x, x^2, \dots, x^k\}$. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass $K(S_1)$ nicht isomorph zu $K(S_2)$ ist.
2. Vereinfache den folgenden Ausdruck in $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3$.

$$-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Betrachte die K -Vektorräume U, V, W . Zeige mithilfe der universellen Eigenschaften, dass:
 - (a) $U \otimes (V \otimes W) \cong (U \otimes V) \otimes W$
 - (b) $U \otimes (V \oplus W) \cong (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$
4. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt antisymmetrisch (oder schiefsymmetrisch), falls

$$A^\top = -A.$$

Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reelle antisymmetrische Matrix. Beweise:

- (a) A is normal.
- (b) Alle Eigenwerte von A sind rein imaginär oder 0.
- (c) Es existiert eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass

$$Q^\top A Q = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \lambda_k \\ & & & -\lambda_k & 0 \\ & & & & & 0_{(n-2k) \times (n-2k)} \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_j > 0$ für $j = 1, \dots, k$. Die Matrix besteht aus k vielen 2×2 -Blöcken der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_j \\ -\lambda_j & 0 \end{pmatrix}$$

und einem Nullblock, falls n ungerade ist.

5. Zeige: Ist $1 \leq n := \min\{\dim_k(V_1), \dim_K(V_2)\} < \infty$ für Vektorräume V_1 und V_2 , so ist jeder Tensor in $V_1 \otimes_K V_2$ eine Summe von n reinen Tensoren, aber im allgemeinen nicht von $n - 1$ reinen Tensoren.