

Musterlösung Serie 24

TENSORPRODUKT

1. Sei $S_1 = \{1, x, 2x, x^2, \dots, x^k\}$ und $S_2 = \{1, x, x^2, \dots, x^k\}$. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass $K(S_1)$ nicht isomorph zu $K(S_2)$ ist.

Lösung: Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\dim_K(K(S_1)) = |S_1| = k + 2$ und $\dim_K(K(S_2)) = |S_2| = k + 1$. Daher können diese beiden Vektorräume nicht isomorph sein.

2. Vereinfache den folgenden Ausdruck in $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3$.

$$-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wir drücken jeweils den ersten Faktor als Linearkombination der Standardbasisvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus, benutzen die Linearität des Tensorprodukts in der ersten Variablen, und fassen dann alle Terme mit demselben ersten Faktor zusammen unter Benutzung der Linearität des Tensorprodukts in der zweiten Variablen. Wir rechnen also

$$\begin{aligned} -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \left((-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für den gewünschten Ausdruck erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
& + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \left(\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\
& = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3. Betrachte die K -Vektorräume U, V, W . Zeige mithilfe der universellen Eigenschaften, dass:

- (a) $U \otimes (V \otimes W) \cong (U \otimes V) \otimes W$
- (b) $U \otimes (V \oplus W) \cong (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$

Lösung:

- (a) Das Tensorprodukt $V \otimes W$ ist gemäss Satz 16.3.8 durch eine bilineare Abbildung $\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes W$ charakterisiert,

$$(v, w) \mapsto v \otimes w$$

sodass für jeden weiteren Vektorraum U und jede bilineare Abbildung $\Phi : V \times W \rightarrow U$ eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi : V \otimes W \rightarrow U$ existiert, sodass $\Phi = \varphi \circ \otimes$ gilt.

Zuerst sei $u \in U$. Definiere $f_u : V \times W \rightarrow (U \otimes V) \otimes W$.

$$(v, w) \mapsto (u \otimes v) \otimes w$$

f_u ist bilinear (*), daher existiert eine eindeutige lineare Abbildung $F_u : V \otimes W \rightarrow (U \otimes V) \otimes W$.

$$v \otimes w \mapsto (u \otimes v) \otimes w$$

Sei nun $f : U \times (V \otimes W) \rightarrow (U \otimes V) \otimes W$

$$(u, v \otimes w) \mapsto F_u(v \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w.$$

Dann ist f bilinear (**), also existiert eine eindeutige lineare Abbildung $F : U \otimes (V \otimes W) \rightarrow (U \otimes V) \otimes W$.

$$u \otimes (v \otimes w) \mapsto (u \otimes v) \otimes w$$

Analog sei $w \in W$, und definiere $g_w : U \times V \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$.

$$(u, v) \mapsto u \otimes (v \otimes w)$$

g_w ist bilinear (* * *), daher existiert eine eindeutige lineare Abbildung $G_w : U \otimes V \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$.

$$u \otimes v \mapsto u \otimes (v \otimes w)$$

Sei nun $g : (U \otimes V) \times W \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$.

$$(u \otimes v, w) \mapsto G_w(u \otimes v) = u \otimes (v \otimes w)$$

g ist bilinear (* * *), daher existiert eine eindeutige lineare Abbildung $G : (U \otimes V) \otimes W \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$.

$$(u \otimes v) \otimes w \mapsto u \otimes (v \otimes w)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} G(F(u \otimes (v \otimes w))) &= G((u \otimes v) \otimes w) = u \otimes (v \otimes w) \\ F(G((u \otimes v) \otimes w)) &= F(u \otimes (v \otimes w)) = (u \otimes v) \otimes w, \end{aligned}$$

somit $G \circ F = \text{id}_{U \otimes (V \otimes W)}$ und $F \circ G = \text{id}_{(U \otimes V) \otimes W}$ und F und G sind zueinander inverse Isomorphismen $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$.

$$(*) \quad f_u(v + v', w) = (u \otimes (v + v')) \otimes w = ((u \otimes v) + (u \otimes v')) \otimes w = (u \otimes v) \otimes w + (u \otimes v') \otimes w = f_u(v, w) + f_u(v', w)$$

$$f_u(\alpha v, w) = (u \otimes \alpha v) \otimes w = (\alpha(u \otimes v)) \otimes w = \alpha((u \otimes v) \otimes w) = \alpha f_u(v, w).$$

$$f_u(v, w + w') = (u \otimes v) \otimes (w + w') = (u \otimes v) \otimes w + (u \otimes v) \otimes w' = f_u(v, w) + f_u(v, w')$$

$$f_u(v, \alpha w) = (u \otimes v) \otimes \alpha w = \alpha((u \otimes v) \otimes w) = \alpha f_u(v, w).$$

(**) Linearität in 2. Variablen folgt aus Linearität von F_u .

$$f(u + u', v \otimes w) = (u + u') \otimes v \otimes w = (u \otimes v + u' \otimes v) \otimes w = (u \otimes v) \otimes w + (u' \otimes v) \otimes w = f(u, v \otimes w) + f(u', v \otimes w)$$

$$(* * *) \quad g_w(u + u', v) = (u + u') \otimes (v \otimes w) = u \otimes (v \otimes w) + u' \otimes (v \otimes w) = g_w(u, v) + g_w(u', v)$$

$$\begin{aligned}
g_w(\alpha u, v) &= (\alpha u) \otimes (v \otimes w) = \alpha(u \otimes (v \otimes w)) = \alpha g_w(u, v) \\
g_w(u, v+v') &= u \otimes ((v+v') \otimes w) = u \otimes (v \otimes w + v' \otimes w) = u \otimes (v \otimes w) + u \otimes (v' \otimes w) = \\
&= g_w(u, v) + g_w(u, v') \\
g_w(u, \alpha v) &= u \otimes (\alpha v \otimes w) = u \otimes (\alpha(v \otimes w)) = \alpha(u \otimes (v \otimes w)) = \alpha g_w(u, v) \\
(***) \text{ Linearität in 1. Variablen folgt aus Linearität von } G_w. \\
g(u \otimes v, w + w') &= u \otimes (v \otimes (w + w')) = u \otimes (v \otimes w + v \otimes w') = u \otimes (v \otimes w) + \\
&+ u \otimes (v \otimes w') = g(u \otimes v, w) + g(u \otimes v, w') \\
g(u \otimes v, \alpha w) &= u \otimes (v \otimes \alpha w) = u \otimes (\alpha(v \otimes w)) = \alpha(u \otimes (v \otimes w)) = \alpha g(u \otimes v, w).
\end{aligned}$$

Die Lösung dieser Aufgabe wurde von Jannik Kochert aufgeschrieben.

(b) Zeige, dass $U \otimes (V \oplus W) \cong (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$.

Für diesen Isomorphismus nutzen wir die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts.

Definiere folgende Abbildungen:

- i. $\Phi : U \otimes (V \oplus W) \rightarrow (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$
- ii. $\Psi : (U \otimes V) \oplus (U \otimes W) \rightarrow U \otimes (V \oplus W)$

Für Φ betrachte ich zunächst die bilineare Abbildung

$$\varphi : U \times (V \oplus W) \rightarrow (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$$

definiert durch $\varphi(u, (v, w)) = (u \otimes v, u \otimes w)$.

Nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\Phi : U \otimes (V \oplus W) \rightarrow (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$ mit

$$\Phi(u \otimes (v, w)) = (u \otimes v, u \otimes w)$$

für alle $u \in U, v \in V, w \in W$.

Für Ψ definiere ich zwei bilineare Abbildungen:

$$\psi_1 : U \times V \rightarrow U \otimes (V \oplus W)$$

durch $\psi_1(u, v) = u \otimes (v, 0)$, und

$$\psi_2 : U \times W \rightarrow U \otimes (V \oplus W)$$

durch $\psi_2(u, w) = u \otimes (0, w)$.

Nach der universellen Eigenschaft existieren eindeutige lineare Abbildungen:

$$\tilde{\psi}_1 : U \otimes V \rightarrow U \otimes (V \oplus W)$$

und

$$\tilde{\psi}_2 : U \otimes W \rightarrow U \otimes (V \oplus W)$$

mit $\tilde{\psi}_1(u \otimes v) = u \otimes (v, 0)$ und $\tilde{\psi}_2(u \otimes w) = u \otimes (0, w)$.

Nun definiere ich $\Psi : (U \otimes V) \oplus (U \otimes W) \rightarrow U \otimes (V \oplus W)$ durch

$$\Psi((u_1 \otimes v), (u_2 \otimes w)) = \tilde{\psi}_1(u_1 \otimes v) + \tilde{\psi}_2(u_2 \otimes w) = u_1 \otimes (v, 0) + u_2 \otimes (0, w)$$

Für elementare Tensoren mit $u_1 = u_2 = u$ erhalten wir

$$\Psi((u \otimes v), (u \otimes w)) = u \otimes (v, 0) + u \otimes (0, w) = u \otimes ((v, 0) + (0, w)) = u \otimes (v, w)$$

Um zu zeigen, dass Φ und Ψ zueinander invers sind, rechnen wir:

Für $u \in U, v \in V, w \in W$:

$$(\Psi \circ \Phi)(u \otimes (v, w)) = \Psi((u \otimes v, u \otimes w)) = u \otimes (v, 0) + u \otimes (0, w) = u \otimes (v, w)$$

Also ist $\Psi \circ \Phi = id_{U \otimes (V \oplus W)}$.

Für die andere Richtung: Sei $(u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes w_1)$ ein elementarer Tensor in $(U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$.

$$(\Phi \circ \Psi)((u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes w_1)) = \Phi(u_1 \otimes (v_1, 0) + u_2 \otimes (0, w_1))$$

Wegen der Linearität von Φ und der Definition von Φ erhalten wir:

$$\Phi(u_1 \otimes (v_1, 0)) + \Phi(u_2 \otimes (0, w_1)) = (u_1 \otimes v_1, u_1 \otimes 0) + (u_2 \otimes 0, u_2 \otimes w_1) = (u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes w_1)$$

Da elementare Tensoren eine Basis des Tensorprodukts bilden, folgt

$$\Phi \circ \Psi = id_{(U \otimes V) \oplus (U \otimes W)}.$$

Somit haben wir $U \otimes (V \oplus W) \cong (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$ bewiesen.

4. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt antisymmetrisch (oder schiefsymmetrisch), falls

$$A^\top = -A.$$

Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reelle antisymmetrische Matrix. Beweise:

- (a) A is normal.
- (b) Alle Eigenwerte von A sind rein imaginär oder 0.
- (c) Es existiert eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass

$$Q^\top A Q = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \lambda_k \\ & & & -\lambda_k & 0 \\ & & & & & 0_{(n-2k) \times (n-2k)} \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_j > 0$ für $j = 1, \dots, k$. Die Matrix besteht aus k vielen 2×2 -Blöcken der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_j \\ -\lambda_j & 0 \end{pmatrix}$$

und einem Nullblock, falls n ungerade ist.

Solution:

Lemma 1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ antisymmetrisch. Dann ist A normal, d.h.

$$A^\top A = AA^\top.$$

Beweis. Da $A^\top = -A$, folgt

$$A^\top A = (-A)A = -A^2 = A(-A) = AA^\top.$$

□

Lemma 2. Alle Eigenwerte einer reellen antisymmetrischen Matrix sind rein imaginär oder gleich null.

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A , und $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$, ein zugehöriger Eigenvektor, d.h. $Av = \lambda v$. Dann gilt:

$$\langle Av, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle.$$

Da $A^\top = -A$, gilt auch:

$$\langle Av, v \rangle = -\langle v, Av \rangle = -\lambda \langle v, v \rangle.$$

Also folgt:

$$\lambda \langle v, v \rangle = -\bar{\lambda} \langle v, v \rangle \Rightarrow (\lambda + \bar{\lambda}) \langle v, v \rangle = 0.$$

Da $\langle v, v \rangle > 0$, folgt $\lambda + \bar{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda \in i\mathbb{R}$.

□

Lemma 3. Die reellen Eigenwerte einer antisymmetrischen Matrix sind gleich null.

Beweis. Da alle Eigenwerte rein imaginär sind (nach vorherigem Lemma), kann ein reeller Eigenwert nur dann auftreten, wenn $\lambda = 0$.

□

Lemma 4. Zu jedem nichttrivialen Paar konjugiert komplexer Eigenwerte $\pm i\lambda$ mit $\lambda > 0$, existiert ein reeller, A -invarianter Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$ der Dimension 2, auf dem A die Form

$$A|_V = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt.

Beweis. Sei $\lambda = i\mu$ mit $\mu > 0$ ein Eigenwert von A , und $v \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor, d.h. $Av = i\mu v$. Schreibe $v = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$Av = i\mu(x + iy) = i\mu x - \mu y.$$

Andererseits:

$$Av = A(x + iy) = Ax + iAy.$$

Vergleiche Real- und Imaginärteil:

$$Ax = -\mu y, \quad Ay = \mu x.$$

Daher ist $\text{span}(x, y) \subset \mathbb{R}^n$ ein 2-dimensionaler A -invarianter Unterraum, auf dem A wie

$$A|_{\text{span}(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix}$$

agiert. □

Spektralsatz für antisymmetrische Matrizen

Satz (Spektralsatz für antisymmetrische Matrizen). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reelle antisymmetrische Matrix. Dann existiert eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \lambda_k \\ & & & -\lambda_k & 0 \\ & & & & & 0_{(n-2k) \times (n-2k)} \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_j > 0$ für $j = 1, \dots, k$. Die Matrix besteht aus k vielen 2×2 -Blöcken der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_j \\ -\lambda_j & 0 \end{pmatrix}$$

und einem Nullblock, falls n ungerade ist.

Beweis. Wir wählen für jedes Paar konjugiert komplexer Eigenwerte $\pm i\lambda_j$ wie im vorherigen Lemma einen reellen A -invarianten Unterraum V_j der Dimension 2, auf dem A durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_j \\ -\lambda_j & 0 \end{pmatrix}$$

dargestellt wird. Die Orthogonalität dieser Räume folgt aus der Normalität von A , d.h. sie können gemeinsam diagonalisiert werden.

Die Summe aller V_j hat Dimension $2k$, und wir wählen ein Orthonormalsystem für jeden V_j . Falls n ungerade ist, bleibt ein eindimensionaler Raum übrig, auf dem A null ist.

Zusammengesetzt ergibt dies eine orthogonale Matrix Q , sodass

$$Q^T A Q = \bigoplus_{j=1}^k \begin{pmatrix} 0 & \lambda_j \\ -\lambda_j & 0 \end{pmatrix} \oplus 0.$$

□

5. Zeige: Ist $1 \leq n := \min\{\dim_k(V_1), \dim_K(V_2)\} < \infty$ für Vektorräume V_1 und V_2 , so ist jeder Tensor in $V_1 \otimes_K V_2$ eine Summe von n reinen Tensoren, aber im allgemeinen nicht von $n - 1$ reinen Tensoren.

Lösung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $n = \dim_K(V_2) \leq \dim_K(V_1)$ annehmen. Sei $\{b_i\}_{i \in I}$ eine Basis von V_1 und sei $\{b'_1, \dots, b'_n\}$ eine Basis von V_2 . Dann ist

$$\{b_i \otimes b'_j \mid i \in I, 1 \leq j \leq n\}$$

eine Basis von $V_1 \otimes V_2$. Jeder Vektor $v \in V_1 \otimes V_2$ lässt sich daher schreiben als

$$v = \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^n a_{ij} b_i \otimes b'_j$$

für eindeutige Koeffizienten $a_{ij} \in K$. Mit $v_j := \sum_{i \in I} a_{ij} b_i \in V_1$ für alle j folgt

$$v = \sum_{j=1}^n v_j \otimes b'_j.$$

Also ist v die Summe der n reinen Tensoren $v_1 \otimes b'_1, \dots, v_n \otimes b'_n$.

Wir müssen weiter zeigen, dass ein Tensor existiert, welcher nicht die Summe von $n - 1$ reinen Tensoren ist. Wegen $\dim(V_1) \geq \dim(V_2)$ können wir dabei $\{1, \dots, n\} \subset I$ annehmen.

Behauptung. Der Tensor $v := \sum_{i=1}^n b_i \otimes b'_i$ lässt sich nicht als Summe von $n - 1$ reinen Tensoren schreiben.

Beweis. Angenommen, es sei $v = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \otimes w_i$ für Vektoren $v_i \in V_1$ und $w_i \in V_2$. Aus Dimensionsgründen existiert dann eine nicht-verschwindende Linearform $\ell: V_2 \rightarrow K$ mit $\ell(w_i) = 0$ für alle $i = 1, \dots, n - 1$. Durch Anwenden der linearen Abbildung $\text{id}_{V_1} \otimes \ell: V_1 \otimes_K V_2 \rightarrow V_1 \otimes_K K$ erhalten wir

$$\sum_{i=1}^n \ell(b'_i) \cdot (b_i \otimes 1) = \sum_{i=1}^n b_i \otimes \ell(b'_i) = (\text{id}_{V_1} \otimes \ell)(v) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \otimes \ell(w_i) = 0.$$

Da die Vektoren $b_i \otimes 1$ für alle $i \in I$ eine Basis von $V_1 \otimes_K K$ bilden, folgt daraus $\ell(b'_i) = 0$ für alle i . Da andererseits die b'_i eine Basis von V_2 bilden, folgt daraus $\ell = 0$, im Widerspruch zur Annahme. $\square$