D-MATH | Lineare Algebra II | FS 2025
Prof. Dr. S. Zerbes

Serie 25

Tensorprodukt

1. Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Zeige

$$V^* \otimes W \cong \operatorname{Hom}(V, W).$$

2. Sei V ein Vektorraum der Dimension n und sei t ein Element von $V \otimes_K V$. Seien $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ geordnete Basen von V und schreibe

$$t \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot b_i \otimes b_j \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \alpha'_{ij} \cdot b'_i \otimes b'_j$$

mit eindeutigen Koeffizienten $\alpha_{ij}, \alpha'_{ij} \in K$. Beschreibe die Beziehung zwischen den Matrizen

$$A := (\alpha_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \quad \text{und} \quad A' := (\alpha'_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

in Termen der Basiswechselmatrix $[\mathrm{id}]^B_{B'}$.

3. Seien U, V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Hom}(U \otimes V, W) \cong \operatorname{Hom}(U, \operatorname{Hom}(V, W)).$$

Unwichtige Bemerkung. Wir sagen, dass der "Hom-Funktor" und das Tensorprodukt ein adjungiertes Paar bilden.

4. Sei $\big(V, \langle\ ,\ \rangle\big)$ ein unitärer Vektorraum. Bezeichne V aufgefasst als *reellen* Vektorraum mit $V_{\mathbb{R}}$. Zeige:

   (a) Der Realteil $\operatorname{Re}\langle\ ,\ \rangle$ ist ein (euklidisches) Skalarprodukt auf $V_{\mathbb{R}}$.

   (b) Für jede Orthonormalbasis B von $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ist

$$\big\{ v, iv \;\big|\; v \in B \big\}$$

   eine Orthonormalbasis von $(V_{\mathbb{R}}, \operatorname{Re}\langle\ ,\ \rangle)$.

   (c) Jeder unitäre Endomorphismus von V ist ein orthogonaler Endomorphismus von $V_{\mathbb{R}}$.

5. Sei $f\colon V \to V'$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen, und sei L ein Oberkörper von K. Zeige:

   (a) Die Abbildung $f \otimes \mathrm{id}_L\colon V_L \to V'_L$ ist L-linear.

   (b) $\mathrm{Kern}(f \otimes \mathrm{id}_L) = \mathrm{Kern}(f) \otimes_K L$.

   (c) $\mathrm{Bild}(f \otimes \mathrm{id}_L) = \mathrm{Bild}(f) \otimes_K L$.

   (d) $\mathrm{Rang}_L(f \otimes \mathrm{id}_L) = \mathrm{Rang}_K(f)$.

6. Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit $\mathrm{char}(K) = 0$. Berechne die Dimension des r-fachen alternierenden Produkts $\mathrm{Alt}^r(V)$.