D-MATH Lineare Algebra II FS 2025
Prof. Dr. S. Zerbes

Musterlösung Serie 25

Tensorprodukt

1. Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Zeige

$$V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}(V, W).$$

Solution: Definiere die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & V^* \times W & \to & \mathrm{Hom}(V, W) \\ & (\ell, w) & \mapsto & (\varphi_{(\ell,w)} : v \mapsto \ell(v)w) \end{array}$$

Nach den Regeln der Addition und Skalarmultiplikation für lineare Funktionale und lineare Abbildungen folgt, dass diese Abbildung bilinear ist (Nachrechnen!). Also existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\eta : V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$, sodass das Diagram

$$\begin{tikzcd} V^* \times W \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "\varphi"'] & V^* \otimes W \arrow[d, "\eta"] \\ & \mathrm{Hom}(V, W) \end{tikzcd}$$

kommutiert. In anderen Worten gilt für beliebige $\ell \in V^*$, $w \in W$

$$\eta(\ell \otimes w) = \varphi_{(\ell,w)}.$$

Zuerst zeigen wir, dass diese Abbildung surjektiv ist. Seien $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$ eine Basis von V und sei $\mathcal{B}^*$ die korrespondierende Dualbasis. Betrachte $\{w_i := L(e_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset W$. Jetzt gilt für $v \in V$

$$\eta\left(\sum_{i=1}^n e_i^* \otimes w_i\right)(v) = \sum_{i=1}^n \varphi_{(e_i^*, w_i)}\left(\sum_{j=1}^n e_j^*(v) e_j\right) = \sum_{i=1}^n e_i^*(v) L(e_i) = L(v).$$

Also ist η surjektiv.

Als nächstes zeigen wir die Injektivität von η. Sei $\mathcal{C} = \{f_j\}_{j=1}^m$ eine Basis von W. Nehme an, dass

$$\eta\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}(e_i^* \otimes f_j)\right) = \eta\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(e_i^* \otimes f_j)\right).$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
\forall v \in V: \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} e_i^*(v) f_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} e_i^*(v) f_j \\
\Leftrightarrow \forall v \in V,\ \forall 1 \leqslant j \leqslant m: \quad & \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i^*(v) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} e_i^*(v) \\
\Leftrightarrow \forall 1 \leqslant j \leqslant m: \quad & \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i^* = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} e_i^* \\
\Leftrightarrow \forall 1 \leqslant j \leqslant m,\ \forall 1 \leqslant i \leqslant n: \quad & \alpha_{ij} = \beta_{ij},
\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} (e_i^* \otimes f_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} (e_i^* \otimes f_j).$$

Also ist η injektiv, und damit sind wir fertig.

2. Sei V ein Vektorraum der Dimension n und sei t ein Element von $V \otimes_K V$. Seien $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $B' = (b_1', \ldots, b_n')$ geordnete Basen von V und schreibe

$$t \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot b_i \otimes b_j \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}' \cdot b_i' \otimes b_j'$$

mit eindeutigen Koeffizienten $\alpha_{ij}, \alpha_{ij}' \in K$. Beschreibe die Beziehung zwischen den Matrizen

$$A := (\alpha_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \quad \text{und} \quad A' := (\alpha_{ij}')_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

in Termen der Basiswechselmatrix $[\mathrm{id}]_{B'}^{B}$.

Lösung: Die Matrix $M := [\mathrm{id}]_{B'}^{B} = (m_{ij})_{i,j}$ ist charakterisiert durch die Formel $b_i = \sum_{k=1}^{n} m_{ki} b_k'$ für alle i. Es folgt

$$\begin{aligned}
t \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\, b_i \otimes b_j \;&=\; \sum_{i,j} \alpha_{ij} \Big(\sum_{k} m_{ki} b_k'\Big) \otimes \Big(\sum_{\ell} m_{\ell j} b_\ell'\Big) \\
&=\; \sum_{i,j,k,\ell} \alpha_{ij} m_{ki} m_{\ell j}\, b_k' \otimes b_\ell' \\
&=\; \sum_{k,\ell} \Big(\sum_{i,j} \alpha_{ij} m_{ki} m_{\ell j}\Big) b_k' \otimes b_\ell' \,.
\end{aligned}$$

Da $\{b_i' \otimes b_j' \mid i,j = 1, \ldots, n\}$ eine Basis von $V \otimes V$ bildet, folgt für alle k, ℓ

$$\alpha_{k\ell}' = \sum_{i,j} m_{ki} \alpha_{ij} m_{\ell j}.$$

In Matrizen bedeutet dies $A' = M \cdot A \cdot M^T$.

3. Seien U, V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Hom}(U \otimes V, W) \cong \operatorname{Hom}(U, \operatorname{Hom}(V, W)).$$

Unwichtige Bemerkung. Wir sagen, dass der "Hom-Funktor" und das Tensorprodukt ein adjungiertes Paar bilden.

Lösung: Definieren wir die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \operatorname{Hom}(U \otimes V, W) & \to & \operatorname{Hom}(U, \operatorname{Hom}(V, W)) \\ & [\tau : U \otimes V \to W] & \mapsto & \left[\begin{array}{cccc} \Phi(\tau) : & U & \to & \operatorname{Hom}(V, W) \\ & u & \mapsto & \tau_u : v \mapsto \tau(u \otimes v) \end{array} \right] \end{array}$$

Wir überprüfen, dass diese Abbildung linear ist: seien $\tau, \sigma \in \operatorname{Hom}(U \otimes V, W)$ und $a, b \in K$. Dann

$$\begin{aligned} (a\tau + b\sigma)_u(v) &= (a\tau + b\sigma)(u \otimes v) \\ &= a\tau(u \otimes v) + b\sigma(u \otimes v) \\ &= a\tau_u(v) + b\sigma_u(v) \end{aligned}$$

Da dies für alle $u \in U$ und $v \in V$ gilt, haben wir $\Phi(a\tau + b\sigma) = a\Phi(\tau) + b\Phi(\sigma)$. Dies beweist, dass Φ linear ist. Wir müssen noch beweisen, dass Φ eine lineare Inverse zulässt. Betrachten wir die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \operatorname{Hom}(U, \operatorname{Hom}(V, W)) & \to & \operatorname{Hom}(U \otimes V, W) \\ & \left[\begin{array}{cccc} \sigma : & U & \to & \operatorname{Hom}(V, W) \\ & u & \mapsto & \sigma_u \end{array} \right] & \mapsto & \left[\begin{array}{cccc} \Psi(\sigma) : & U \otimes V & \mapsto & W \\ & u \otimes v & \mapsto & \sigma_u(v) \end{array} \right] \end{array}$$

Dies ist eine beidseitige Inverse von Φ. Tatsächlich haben wir

$$\begin{aligned} ((\Psi \circ \Phi)(\tau))(u \otimes v) &= (\Phi(\tau)(u))(v) = \tau(u \otimes v) \\ [((\Phi \circ \Psi)(\sigma))(u)](v) &= \Psi(\sigma)(u \otimes v) = \sigma_u(v) \end{aligned}$$

Da v beliebig war, gilt $(\Phi \circ \Psi)(\sigma)(u) = \sigma_u$ als Elemente von $\operatorname{Hom}(V, W)$, und da dies für alle u gilt, ist $(\Psi \circ \Phi)(\sigma) = \sigma$ als Elemente von $\operatorname{Hom}(U, \operatorname{Hom}(V, W))$.

4. Sei $\big(V, \langle\, , \rangle\big)$ ein unitärer Vektorraum. Bezeichne V aufgefasst als *reellen* Vektorraum mit $V_{\mathbb{R}}$. Zeige:

   (a) Der Realteil $\operatorname{Re}\langle\, , \rangle$ ist ein (euklidisches) Skalarprodukt auf $V_{\mathbb{R}}$.

   (b) Für jede Orthonormalbasis B von $(V, \langle\, , \rangle)$ ist

   $$\big\{v, iv \;\big|\; v \in B\big\}$$

   eine Orthonormalbasis von $(V_{\mathbb{R}}, \operatorname{Re}\langle\, , \rangle)$.

(c) Jeder unitäre Endomorphismus von V ist ein orthogonaler Endomorphismus von $V_{\mathbb{R}}$.

Lösung:

(a) Man prüft direkt, dass $\operatorname{Re}\langle\ ,\ \rangle$ bilinear ist; zum Beispiel gilt $\operatorname{Re}\langle \lambda v, w\rangle = \operatorname{Re}(\overline{\lambda}\langle v, w\rangle) = \lambda \operatorname{Re}\langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V_{\mathbb{R}}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wegen $\operatorname{Re}\overline{z} = \operatorname{Re} z$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\operatorname{Re}\langle v, w\rangle = \operatorname{Re}(\overline{\langle w, v\rangle}) = \operatorname{Re}\langle w, v\rangle$$

für alle $v, w \in V_{\mathbb{R}}$, also $\operatorname{Re}\langle\ ,\ \rangle$ symmetrisch, und wegen $\langle v, v\rangle > 0$ für alle $v \in V_{\mathbb{R}} \smallsetminus \{0\}$ ist $\operatorname{Re}\langle\ ,\ \rangle$ zudem positiv definit, also ein euklidisches Skalarprodukt.

(b) Jeder Vektor in V ist eine komplexe Linearkombination der Basisvektoren B, also auch eine reelle Linearkombination der Vektoren $\{v, iv \mid v \in B\}$; Die Vektoren v, iv für alle $v \in B$ erzeugen also V.

Aus $\langle b, b'\rangle = \delta_{bb'}$ für alle $b, b' \in B$ folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\langle b, b'\rangle &= \delta_{bb'}, \\
\operatorname{Re}\langle b, ib'\rangle &= \operatorname{Re}\big(i \cdot \delta_{bb'}\big) = 0, \\
\operatorname{Re}\langle ib, ib'\rangle &= \operatorname{Re}\big(i \cdot (-i) \cdot \delta_{bb'}\big) = \delta_{bb'}.
\end{aligned}$$

Also ist $\{b, ib \mid b \in B\}$ eine Orthonormalbasis von $(V_{\mathbb{R}}, \operatorname{Re}\langle\ ,\ \rangle)$.

(c) Für einen unitären Endomorphismus f von V gilt $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$, also $\operatorname{Re}\langle f(v), f(w)\rangle = \operatorname{Re}\langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$, also f orthogonal bezüglich $\operatorname{Re}\langle\ ,\ \rangle$.

5. Sei $f\colon V \to V'$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen, und sei L ein Oberkörper von K. Zeige:

   (a) Die Abbildung $f \otimes \mathrm{id}_L\colon V_L \to V'_L$ ist L-linear.

   (b) $\mathrm{Kern}(f \otimes \mathrm{id}_L) = \mathrm{Kern}(f) \otimes_K L$.

   (c) $\mathrm{Bild}(f \otimes \mathrm{id}_L) = \mathrm{Bild}(f) \otimes_K L$.

   (d) $\mathrm{Rang}_L(f \otimes \mathrm{id}_L) = \mathrm{Rang}_K(f)$.

   Lösung:

   (a) Nach Konstruktion ist die Abbildung $f \otimes \mathrm{id}_L$ K-linear, also insbesondere additiv. Ausserdem gilt für alle $v \in V$ und $x, y \in L$

$$\begin{aligned}(f \otimes \mathrm{id}_L)(x \cdot (v \otimes y)) &= (f \otimes \mathrm{id}_L)(v \otimes xy) \;=\; f(v) \otimes xy \\ &= x \cdot (f(v) \otimes y) \;=\; x \cdot (f \otimes \mathrm{id}_L)(v \otimes y).\end{aligned}$$

   Da jedes Element $\tilde{v} \in V \otimes_K L$ eine Summe von Elementen der Form $v \otimes y$ ist, folgt

$$(f \otimes \mathrm{id}_L)(x \cdot \tilde{v}) = x \cdot (f \otimes \mathrm{id}_L)(\tilde{v})$$

   für alle $x \in L$. Insgesamt ist $f \otimes \mathrm{id}_L$ also L-linear.

   (b-c) Wähle eine Basis B von $\mathrm{Kern}(f)$, ein Komplement $U \subset V$ von $\mathrm{Kern}(f)$, sowie eine Basis B' von U. Dann induziert f eine bijektive Abbildung von B' auf eine Basis $B'' = f(B')$ von $\mathrm{Bild}(f)$. Nach der Vorlesung sind dann

$$\begin{aligned}\tilde{B} &:= \{b \otimes 1 \mid b \in B\} && \text{eine Basis von } \mathrm{Kern}(f) \otimes_K L,\\ \tilde{B}' &:= \{b' \otimes 1 \mid b' \in B'\} && \text{eine Basis von } U \otimes_K L,\\ \tilde{B} \cup \tilde{B}' &= \{b \otimes 1 \mid b \in B \cup B'\} && \text{eine Basis von } V \otimes_K L,\\ \tilde{B}'' &:= \{b'' \otimes 1 \mid b'' \in B''\} && \text{eine Basis von } \mathrm{Bild}(f) \otimes_K L.\end{aligned}$$

   Insbesondere ist somit

$$V \otimes_K L = (\mathrm{Kern}(f) \otimes_K L) \oplus (U \otimes_K L).$$

   Für jedes $b \in B$ gilt $(f \otimes \mathrm{id}_L)(b \otimes 1) = f(b) \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0$; also ist $B \subset \mathrm{Kern}(f \otimes \mathrm{id}_L)$ und somit $\mathrm{Kern}(f) \otimes_K L \subset \mathrm{Kern}(f \otimes \mathrm{id}_L)$. Andererseits bildet $f \otimes \mathrm{id}_L$ die Menge $\tilde{B}'$ bijektiv auf $\tilde{B}''$ ab und induziert daher einen Isomorphismus $U \otimes_K L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bild}(f) \otimes_K L$. Zusammen impliziert dies also $\mathrm{Bild}(f \otimes \mathrm{id}_L) = \mathrm{Bild}(f) \otimes_K L$ und $\mathrm{Kern}(f \otimes \mathrm{id}_L) = \mathrm{Kern}(f) \otimes_K L$, wie gewünscht.

   (d) Aus der Definition des Rangs, der Aussage (c), und der Dimensionsinvarianz der Basiserweiterung folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{Rang}_L(f \otimes \mathrm{id}_L) &= \dim_L(\mathrm{Bild}(f \otimes \mathrm{id}_L))\\ &= \dim_L(\mathrm{Bild}(f) \otimes_K L)\\ &= \dim_K(\mathrm{Bild}(f)) \;=\; \mathrm{Rang}_K(f).\end{aligned}$$

6. Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit $\mathrm{char}(K) = 0$. Berechne die Dimension des r-fachen alternierenden Produkts $\mathrm{Alt}^r(V)$.

   Lösung: Wir berechnen $\dim \wedge^r V$. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Dann ist

$$\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_r} : i_k \neq i_\ell \,\forall k, \ell\}$$

   ein Erzeugendensystem von $\wedge^r V$; weiterhin gilt

$$v_{\sigma(i_1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(i_r)} \in \langle\, v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_r} \rangle \qquad \forall\, \sigma \in S_r.$$

   Daher ist

$$\mathcal{B} = \{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_r} : 1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_r \leqslant n\}$$

   ein Erzeugendensystem von $\wedge^r V$. Weiterhin ist dieses Erzeugendensystem linear unabhaengig, da die Bilder der Elemente unter A_r linear unabhaengig sind. Daher ist $\dim \wedge^r V$ die Anzahl der Elemente in $\mathcal{B}$, d.h. gleich $\binom{n}{r}$.