Lösungen 3

1. Bestimmen Sie für welche Werte von $A \in \mathbb{R}$ und $B \in \mathbb{R}$ das folgende Gleichungssystem in den Variablen $x, y, z \in \mathbb{R}$ lösbar ist.

$$\begin{aligned} 1x + 2y - 3z &= 14 \\ 3x + 7y - 9z &= 47 \\ -3x - 5y + Az &= B \\ 2x + 4y - 3z &= 29. \end{aligned}$$

Geben Sie für Ihre gefundenen Werte von A und B alle Lösungen an.

Solution: Um das Beispiel zu lösen schreiben wir das Gleichungssystem zuallererst in Matrixschreibweise als

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 3 & 7 & -9 & 47 \\ -3 & -5 & A & B \\ 2 & 4 & -3 & 29 \end{array}\right).$$

Nun bringen wir die Matrix mittels EZU in eine reduzierte Zeilenform

$$
\begin{aligned}
S(1,2,-3) \to & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & A & B \\ 2 & 4 & -3 & 29 \end{array}\right), \\
S(1,3,3) \to & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & A-9 & B+42 \\ 2 & 4 & -3 & 29 \end{array}\right), \\
S(1,4,-2) \to & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & A-9 & B+42 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right), \\
S(2,1,-2) \to & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & A-9 & B+42 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right), \\
S(2,3,-1) \to & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & A-9 & B+37 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right), \\
S(4,1,1) \to & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & A-9 & B+37 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right), \\
S(4,3,3) \to & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & A & B+40 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

Damit dieses Gleichungssystem also lösbar ist, müssen $x = 5$ und $y = 5$ gelten. Ausserdem muss z die beiden folgenden Gleichungen erfüllen

$$
\begin{aligned}
Az &= B + 40 \\
3z &= 1.
\end{aligned}
$$

Also folgt $z = \frac{1}{3}$ und wir erhalten

$$\frac{A}{3} = B + 40.$$

Solange A und B also die Gleichung $A = 3B + 120$ erfüllen, ist $(x, y, z) = (5, 5, \frac{1}{3})$ die (einzige) Lösung des Gleichungssystems. Falls A und B die Gleichung $A = 3B + 120$ nicht erfüllen, hat das Gleichungssystem somit keine Lösung.

2. Loesen Sie folgende Gleichungen in $\mathbb{F}_5$:

   (a) $2 + 3x = 1$;

   (b) $4x + 1 = 2$;

   (c) $x^2 = 3$.

   Solution:

   (a) Gesucht ist $x \in \mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ sodass

   $$2 + 3x = 1$$

   gilt. Wir addieren -2 auf beiden Seiten und erhalten

   $$3x = -1 = 4. \tag{1}$$

   Hier haben wir verwendet, dass in dem Körper $\mathbb{F}_5$ -1 und 4 dieselben Elemente sind, denn $4 - (-1) = 5 = 0$. Nun suchen wir das multiplikative inverse von 3 in $\mathbb{F}_5$. Wir sehen, dass 2 die gesuchte Zahl ist, denn

   $$2 \cdot 3 = 6 = 1.$$

   Wir multiplizieren (1) mit 2 auf beiden Seiten und erhalten die Lösung

   $$x = 2 \cdot 4 = 8 = 3$$

   in $\mathbb{F}_5$.

   (b) Wir lösen Die Gleichugn wie folgt:

   $$\begin{aligned} 4x + 1 = 2 \quad &\Leftrightarrow \\ 4x = 1 \quad &\Leftrightarrow \\ x = 4, \end{aligned}$$

   wobei wir von der zweiten auf die dritte Zeile verwendet haben, dass 4 das multiplikative Inverse von 4 in $\mathbb{F}_5$ ist.

   (c) Im Gegensatz zu den vorherigen Teilen haben wir es hier mit einer quadratischen Gleichung, und keiner linearen Gleichung zu tun. Wir vermuten, dass es, analog wie in den reellen Zahlen, womöglich 2 Lösungen für $x^2 - 3 = 0$ in $\mathbb{F}_5$ geben könnte. Denn falls $y \in \mathbb{F}_5$ diese Gleichung löst, dann löst sicherlich auch $-y$ die Gleichung. Da 5 ungerade ist, gilt ausserdem $y \neq -y$ in $\mathbb{F}_5$. Sehen wir uns nun eine Tabelle mit den quadratischen Werten der Elemente in $\mathbb{F}_5$ an:

x	x^2	$x^2 \mod 5$
0	0	0
1	1	1
2	4	4
3	9	4
4	16	1

Tatsächlich gibt es also **keine** Lösung der Gleichung $x^2 = 3$ in $\mathbb{F}_5$.

3. (a) Es sei A eine $(m \times n)$-Matrix mit $m \geqslant 3$. Finden sie für die folgenden EZUs eine passende $(m \times m)$-Matrix E, um die EZU auf A auch als Matrixmultiplikation $E \cdot A$ schreiben zu können:
   i. $P(2,3)$
   ii. $M(1,5)$
   iii. $S(1,2,3)$

   (b) Bringe die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

durch elementare Zeilenumformungen in reduzierte Zeilenstufenform. Sei R die resultierende Matrix. Geben Sie explizit eine invertierbare Matrix W an, sodass gilt

$$W \cdot A = R.$$

Berechnen Sie auch W^{-1}.

Hinweis: Um W und W^{-1} zu finden, ist der erste Teil der Aufgabe sehr hilfreich.

Solution:

(a) i. $P(2,3)$: Das Vertauschen der 2-ten und 3-ten Zeile der Matrix A können wir auch also Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$$

schreiben.

ii. $M(1,5)$: Die Multiplikation der 1-ten Zeile der Matrix A mit 5 können wir auch also Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$$

schreiben.

iii. $S(1,2,3)$: Das Addieren des 3-fachen der 1-ten Zeile zur 2-ten Zeile der Matrix A können wir auch also Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$$

schreiben.

(b) Wir wenden EZU auf A wie folgt an:

$$S(1,2,1) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S(1,3,-1) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M(3,-\tfrac{1}{4}) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$S(3,2,-2) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$S(3,1,-2) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$M(2,\tfrac{1}{4}) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$S(2,1,-1) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$P(2,3) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{pmatrix} = R.$$

Um W zu bestimmen müssen wir uns nun nur überlegen welche EZU wir durchgeführt haben, und welcher Multiplikation einer Matrix dies entspricht. Das Produkt der entspre-chenden acht (3×3)-Matrizen ist

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \dots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Um W^{-1} zu berechnen stellen wir uns die Frage, welche EZUs die Matrix R in die Matrix A umformen - dazu müssen wir aber genau die acht obigen EZU rückgängig machen!
Das bedeutet W^{-1} ist das umgekehrte Produkt der inversen der acht (3×3)-

Matrizen der obigen EZU. Wir erhalten

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \dots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Finde für eine algemeine EZU (also. $S(r,s,\lambda)$, $M(r,\lambda)$ oder $P(r,s)$) eine EZU, die diese rückgängig macht!)

4. Bestimmen Sie alle Matrizen $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit der Eigenschaft, dass die Summe aller Elemente jeder Zeile, jeder Spalte und beider Diagonalen einen vorgegebenen Wert $c \in \mathbb{R}$ annimmt.
Welchen Wert nimmt insbesondere die Zahl a_{22} an?
Ergänzen Sie nun mit dem erlangten Wissen die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 16 & a_{13} \\ 24 & 30 & 36 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

so, dass sie den obigen Bedingungen genügt.

Hinweis: Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf und verwenden Sie EZU um die Lösungen zu finden.

Solution: Wir suchen also eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

die die Gleichungen

$$\begin{aligned} &a_{11} + a_{21} + a_{31} = a_{12} + a_{22} + a_{32} = a_{13} + a_{23} + a_{33} = \\ &a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33} = \\ &a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{13} + a_{22} + a_{31} = c \end{aligned}$$

erfüllt. Das sind insgesamt acht Gleichungen für die neun Unbekannten

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}.$$

Wir schreiben diese in Matrixform wie folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & c \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2c}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2c}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -\frac{c}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -\frac{2c}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & \frac{4c}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei wir die Matrix mit EZU in reduzierte Zeilenform gebracht haben. Aufgrund der 5-ten Zeile sehen wir, dass für eine Lösung zwangsweise $a_{22} = \frac{c}{3}$ gelten muss. Des Weiteren können wir die anderen 6 nicht-trivialen Zeilen als Gleichungen wie folgt schreiben

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{33} &= \tfrac{2c}{3} \\ a_{12} + a_{32} &= \tfrac{2c}{3} \\ a_{13} - a_{32} - a_{33} &= -\tfrac{c}{3} \\ a_{21} - a_{32} - 2a_{33} &= -\tfrac{2c}{3} \\ a_{23} + a_{32} + 2a_{33} &= \tfrac{4c}{3} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} &= c. \end{aligned}$$

Insbesondere fällt uns auf, dass wir die ersten 7 Variablen $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}$ als Summe von Vielfachen der Werte c, a_{32} und a_{33} schreiben können. Wir setzen $a_{32} = \lambda$ und $a_{33} = \mu$ und erhalten dann

$$\begin{aligned} a_{11} &= \tfrac{2c}{3} - \mu \\ a_{12} &= \tfrac{2c}{3} - \lambda \\ a_{13} &= -\tfrac{c}{3} + \lambda + \mu \\ a_{21} &= -\tfrac{2c}{3} + \lambda + 2\mu \\ a_{22} &= \tfrac{c}{3} \\ a_{23} &= \tfrac{4c}{3} - \lambda - 2\mu \\ a_{31} &= c - \lambda - \mu. \end{aligned}$$

In Matrixform erhalten wir für A den Ausdruck

$$A = \frac{c}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wissen bereits, dass $a_{22} = \frac{1}{3}c$ eindeutig durch c festgelegt ist. Für das konkrete Beispiel ist also $c = 90$ und somit $a_{12} = 16 = 60 - \lambda$ und $a_{21} = 24 = -60 + \lambda + 2\mu$. Es folgt $\lambda = 44, \mu = 20$, was schliesslich zu

$$A = \begin{pmatrix} 40 & 16 & 34 \\ 24 & 30 & 36 \\ 26 & 44 & 20 \end{pmatrix}$$

führt.