Serie 4

1. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^4$ sind reelle Unterräume? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\begin{aligned} V_1 &:= \{\, (0, x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R} \,\} \\ V_2 &:= \{\, (x^4, x^3, x^2, x) \mid x \in \mathbb{R} \,\} \\ V_3 &:= \{\, (x, x+y, x-y, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \,\} \\ V_4 &:= \{\, (x^4 - y^4, 0, 0, 0) \mid x, y \in \mathbb{R} \,\} \\ V_5 &:= \{\, (x, y, 0, 0) \mid x, y \in \mathbb{R},\ x > y \,\}. \end{aligned}$$

2. Es sei $V = \mathbb{R}^3$. Für welche Parameter $r, s, t \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$v_1 := \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix},\ v_2 := \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Sei X eine Menge, V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, und $\mathcal{F}(X, V)$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum aller Abbildungen von X nach V, mit punktweiser Addition

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall x \in X \forall f, g \in \mathcal{F}(X, V)$$

und punktweiser skalarer Multiplikation

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x) \quad \forall x \in X \forall f \in \mathcal{F}(X, V) \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Seien $y \in X$ und $v \in V$ fixiert, sowie $\mathcal{F}_{y,v} := \{f \in \mathcal{F}(X, V) \mid f(y) = v\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_{y,v}$ genau dann ein Unterraum ist, wenn $v = 0$.

(b) Finden Sie einen Unterraum $W \subset \mathcal{F}(X, V)$, so dass

$$\mathcal{F}(X, V) = \mathcal{F}_{y,0} + W,$$

sowie $W \cap \mathcal{F}_{y,0} = \{0_{\mathcal{F}}\}$ gilt, wobei $0_{\mathcal{F}}$ der Nullvektor ist.

4. Gegeben seien die Unterräume

$$V := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie den Durchschnitt $V \cap U$ und finden Sie ein Erzeugendensystem.

5. Sei V die lineare Hülle der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

   in $\mathrm{M}_{1\times 3}(\mathbb{R})$. Finden Sie ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge genau V ist.

6. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

   (a) Sei $v \in V$, dann ist die Menge $W := \{w \in V \mid \exists \lambda \in \mathbb{K} : w = \lambda \cdot v\}$ ein Unterraum von V.

   (b) Eine Teilmenge $W \subset V$ ist genau dann ein Unterraum, wenn $\langle W \rangle = W$.

   (c) Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt $\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$.

   (d) Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt $\langle S_1 \cap S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle$.

   (e) Seien U, W Unterräume von V. Dann ist $U \cup W$ ein Unterraum.

   Hinweis: Die lineare Hülle der leeren Menge $\langle \varnothing \rangle$ ist per Definition der triviale Unterraum $\{0_V\}$.

7. Entscheide, ob folgende Beispiele $\mathbb{Q}$-Vektorräume sind oder nicht, wenn Addition und skalare Multiplikation auf natürliche Weise definiert werden:

   (a) alle Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ vom Grad $\leqslant 4$ mit höchstens 3 Koeffizienten, die nicht null sind;

   (b) alle rationalen $(n \times n)$ Matrizen, deren diagonale Elemente zu Null addieren;

   (c) die reellen Zahlen $\mathbb{R}$;

   (d) die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.