Lösungen 4

1. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^4$ sind reelle Unterräume? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\begin{aligned}
V_1 &:= \left\{ (0, x, 2x, 3x) \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} \\
V_2 &:= \left\{ (x^4, x^3, x^2, x) \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} \\
V_3 &:= \left\{ (x, x+y, x-y, y) \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\} \\
V_4 &:= \left\{ (x^4 - y^4, 0, 0, 0) \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\} \\
V_5 &:= \left\{ (x, y, 0, 0) \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R},\; x > y \right\}.
\end{aligned}$$

Solution: Eine Teilmenge ist genau dann ein reeller Untervektorraum, wenn sie den Nullvektor enthält und für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ und für beliebige Elemente u, v aus der Teilmenge, das Element $u + \lambda v$ auch in der Teilmenge liegt.
Zuerst überprüfen wir, ob das Nullelement $(0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$ in den Teilmengen enthalten ist. Wir sehen, dass $(0, 0, 0, 0)$ ein Element der Teilmengen V_1, V_2, V_3 und V_4 ist (in dem wir x und y gleich 0 setzen). Der Nullvektor ist jedoch nicht in V_5 enthalten, somit ist V_5 sicherlich kein Unterraum.
Überprüfen wir also noch die zweite Bedingung für die ersten vier Teilmengen:

V_1: Für beliebige Elemente $u = (0, x, 2x, 3x)$ und $v = (0, y, 2y, 3y)$ aus V_1 und für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$u + \lambda v = (0, x + \lambda y, 2(x + \lambda y), 3(x + \lambda y)).$$

Das Element $u + \lambda v$ ist also wieder in V_1. Das zeigt, dass V_1 ein Unterraum ist.

V_2: Sei $v = (1, 1, 1, 1) \in V_2$. Der Vektor $2v = (2, 2, 2, 2)$ liegt nicht in V_2, denn es gibt kein $x \in \mathbb{R}$ mit $(2, 2, 2, 2) = (x^4, x^3, x^2, x)$. Folglich ist V_2 kein Unterraum.

V_3: Seien $u = (x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1, y_1)$ und $v = (x_2, x_2 + y_2, x_2 - y_2, y_2)$ zwei beliebige Elemente aus V_3 und sei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Wegen

$$u + \lambda v = \big(x_1 + \lambda x_2, (x_1 + \lambda x_2) + (y_1 + \lambda y_2), (x_1 + \lambda x_2) - (y_1 + \lambda y_2), y_1 + \lambda y_2\big)$$

liegt $u + \lambda v$ wieder in V_3. Die Teilmenge V_3 ist also ein Unterraum.

V_4: Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gibt es Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ sodass $t = x^4 - y^4$ ist (Falls $t \geqslant 0$ ist, sei $x := t^{1/4}$ und $y := 0$ und falls $t < 0$ ist, sei $x = 0$ und $y = (-t)^{1/4}$). Es gilt also

$$V_4 = \left\{ (x^4 - y^4, 0, 0, 0) \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (t, 0, 0, 0) \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für beliebige Elemente $u = (t_1, 0, 0, 0)$ und $v = (t_2, 0, 0, 0)$ dieser Teilmenge und ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$, gilt $u + \lambda v = (t_1 + \lambda t_2, 0, 0, 0)$. Das Element $u + \lambda v$ ist also wieder in V_4, also ist V_4 ein reeller Unterraum.

2. Es sei $V = \mathbb{R}^3$. Für welche Parameter $r, s, t \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$v_1 := \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}, \ v_2 := \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solution: Nach dem Austauschlemma sind v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig genau dann wenn v_1', v_2 und v_3 linear unabhängig ist, wobei

$$v_1' := v_1 - v_2 - v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

ist. Wir sehen, dass diese drei Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^3$ sind genau dann wenn $0 \neq r, s, t$.

3. Sei X eine Menge, V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, und $\mathcal{F}(X, V)$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum aller Abbildungen von X nach V, mit punktweiser Addition

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall x \in X \forall f, g \in \mathcal{F}(X, V)$$

und punktweiser skalarer Multiplikation

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x) \quad \forall x \in X \forall f \in \mathcal{F}(X, V) \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Seien $y \in X$ und $v \in V$ fixiert, sowie $\mathcal{F}_{y,v} := \{f \in \mathcal{F}(X, V) \mid f(y) = v\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_{y,v}$ genau dann ein Unterraum ist, wenn $v = 0$.

(b) Finden Sie einen Unterraum $W \subset \mathcal{F}(X, V)$, so dass

$$\mathcal{F}(X, V) = \mathcal{F}_{y,0} + W,$$

sowie $W \cap \mathcal{F}_{y,0} = \{0_{\mathcal{F}}\}$ gilt, wobei $0_{\mathcal{F}}$ der Nullvektor ist.

Solution: Bevor wir die Aufgabenteile lösen, bemerken wir, dass der Nullvektor in diesem Vektorraum die Nullfunktion $\mathbf{0}_{\mathcal{F}}$, d.h. die Funktion die durch

$$\mathbf{0}_{\mathcal{F}}(x) = 0_V \quad \text{für alle } x \in X,$$

definiert ist.

(a) "$\Rightarrow$" Angenommen $\mathcal{F}_{y,v}$ ist ein Unterraum. Dann gilt insbesondere $\mathbf{0}_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}_{y,v}$. Das impliziert

$$0_V = \mathbf{0}_{\mathcal{F}}(y) = v.$$

Also folgt $v = 0$.
"$\Leftarrow$": Sei also $v = 0_V$. Dann ist der Nullvektor $\mathbf{0}_{\mathcal{F}}$ sicherlich in $\mathcal{F}_{y,v}$ enthalten. Seien nun $f, g \in \mathcal{F}_{y,v}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebeig. Dann folgt

$$(f + \lambda \cdot g)(y) = f(y) + (\lambda \cdot g)(y) = f(y) + \lambda g(y) = 0_V + \lambda 0_V = 0_V.$$

Somit liegt auch die Funktion $f + \lambda \cdot g$ in $\mathcal{F}_{y,v}$. Also ist $\mathcal{F}_{y,v}$ ein Unterraum.

(b) Wir behaupten, dass wir für W den Unterraum aller konstanten Funktionen verwenden können. Sei für jedes $v \in V$ die konstante Funktion

$$\mathbf{1}_v(x) = v \quad \text{für alle } x \in X,$$

definiert. Wir definieren den Unterraum

$$W = \{\mathbf{1}_v : v \in V\}.$$

Dass diese Teilmenge wirklich ein Unterraum ist, folgt aus der Tatsache, dass V ein Vektorraum ist.
Somit gilt für jedes Element $f \in W \cap \mathcal{F}_{y,0}$, dass f einerseits konstant ist, und andererseits $f(y) = 0_V$ erfüllt, also folgt $f = \mathbf{0}_{\mathcal{F}}$. Des Weiteren können wir eine beliebige Funktion $f \in \mathcal{F}(X, V)$ schreiben als

$$f = (f - \mathbf{1}_{f(y)}) + \mathbf{1}_{f(y)}.$$

Wir sehen, dass $\mathbf{1}_{f(y)} \in W$ und

$$(f - \mathbf{1}_{f(y)})(y) = f(y) - \mathbf{1}_{f(y)}(y) = f(y) - f(y) = 0_V,$$

also $f - \mathbf{1}_{f(y)} \in \mathcal{F}_{y,0}$ erfüllt sind. Das heisst es gilt

$$\mathcal{F}(X, V) = \mathcal{F}_{y,0} + W,$$

was zu zeigen war.

4. Gegeben seien die Unterräume

$$V := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie den Durchschnitt $V \cap U$ und finden Sie ein Erzeugendensystem.

Solution: Wir setzen

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$,$$

und versuchen eine gemeinsame Linearkombination der Vektoren zu finden. Das heisst, wir suchen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sodass

$$av_1 + bv_2 = cv_3 + dv_4$$

gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} b &= c + d \\ a &= -c - 2d \\ -2a &= d. \end{aligned}$$

Alle Lösungen dieses Gleichungssystems sind gegeben durch $a = t$, $b = t$, $c = 3t$ $d = -2t$ für ein beliebiges $t \in \mathbb{R}$. Damit folgt

$$V \cap U = \{v \in \mathbb{R}^3 \colon v = t(v_1 + v_2),\ \text{für ein } t \in \mathbb{R}\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} t \\ t \\ -2t \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{R}^3 \colon t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Also ist der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem.

5. Sei V die lineare Hülle der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{M}_{1\times 3}(\mathbb{R})$. Finden Sie ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge genau V ist.

Solution: Wir bemerken, dass der mittlere Eintrag jeder der drei Vektoren genau das Mittel der beiden äusseren ist. Das heisst alle drei Vektoren erfüllen die Gleichung

$$x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}.$$

Andererseits lässt sich jeder Vektor $(x_1 \quad x_2 \quad x_3)$, der $x_2 = \frac{x_1+x_3}{2}$ erfüllt, als Linearkombination der drei Vektoren schreiben. Denn setzen wir

$$\begin{aligned} a + 7c &= x_1 \\ 3a + 9c &= x_3, \end{aligned}$$

erhalten wir $a = \frac{7x_3-9x_1}{12}$ und $c = \frac{3x_1-x_3}{12}$.
Wir überprüfen die Gleichung

$$2a + 8c = x_2$$

und folgern somit

$$(x_1, x_2, x_3) = a \cdot (1 \quad 2 \quad 3) + c \cdot (7 \quad 8 \quad 9)$$

V ist also genau die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems (S) gegeben durch

$$(S)\colon x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

6. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

   (a) Sei $v \in V$, dann ist die Menge $W := \{w \in V \mid \exists \lambda \in \mathbb{K} : w = \lambda \cdot v\}$ ein Unterraum von V.

   (b) Eine Teilmenge $W \subset V$ ist genau dann ein Unterraum, wenn $\langle W \rangle = W$.

   (c) Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt $\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$.

   (d) Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt $\langle S_1 \cap S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle$.

   (e) Seien U, W Unterräume von V. Dann ist $U \cup W$ ein Unterraum.

   Hinweis: Die lineare Hülle der leeren Menge $\langle \varnothing \rangle$ ist per Definition der triviale Unterraum $\{0_V\}$.

   Solution:

   (a) Ja, W ist ein Unterraum. Es gilt $W = \langle v \rangle$.

   (b) **"$\Leftarrow$":** Angenommen $W = \langle W \rangle$, dann ist W ein Unterraum, da jede lineare Hülle ein Unterraum.

   "$\Rightarrow$": Angenommen W ist ein Unterraum. Dann liegt aber jede endliche Linearkombination von Elementen aus W wieder in W. Somit folgt $\langle W \rangle \subseteq W$. Die andere inklusion ist klar. Somit folgt $W = \langle W \rangle$.

   (c) Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt $\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$.

"$\supset$": Da $S_i \subset S_1 \cup S_2$ für $i = 1, 2$, folgt nach der Definition der linearen Hülle, dass $\langle S_i \rangle \subset \langle S_1 \cup S_2 \rangle$ für $i = 1, 2$ gilt. Also folgt auch, dass die Summe zweier Elemente aus $\langle S_1 \rangle$ und $\langle S_2 \rangle$ in $\langle S_1 \cup S_2 \rangle$ liegt, da letzteres ja ein Unterraum ist. Es folgt also $\langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle \subset \langle S_1 \cup S_2 \rangle$.

"$\subset$": $S_i \subset \langle S_i \rangle \subset \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$ für $i = 1, 2$, also gilt auch $S_1 \cup S_2 \subset \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$. Da $S_1 \rangle + \langle S_2$ ein Unterraum ist, liegt auch jede endliche Linearkombination von Elementen aus $S_1 \cup S_2$ in diesem Unterraum. Das heisst $\langle S_1 \cup S_2 \rangle \subset \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$.

(d) Diese Aussage ist falsch. Angenommen $V = \mathbb{R}^2$ und $S_1 = (1, 0)$ und $S_2 = (3, 0)$. Dann gilt
$$\langle S_1 \cap S_2 \rangle = \langle \varnothing \rangle = \{0_V\}$$
jedoch sind $\langle S_1 \rangle$ und $\langle S_2 \rangle$ dieselben Unterräume. Also ist
$$\langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle = \{(t, 0) \in \mathbb{R}^2 \colon t \in \mathbb{R}\}.$$

(e) Diese Aussage ist falsch. Angenommen $V = \mathbb{R}^2$ und $U = (1, 0)$ und $W = (0, 1)$. Dann gilt $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$, aber $(1, 1) \notin U \cup W$.

7. Entscheide, ob folgende Beispiele $\mathbb{Q}$-Vektorräume sind oder nicht, wenn Addition und skalare Multiplikation auf natürliche Weise definiert werden:

(a) alle Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ vom Grad $\leqslant 4$ mit höchstens 3 Koeffizienten, die nicht null sind;

(b) alle rationalen $(n \times n)$ Matrizen, deren diagonale Elemente zu Null addieren;

(c) die reellen Zahlen $\mathbb{R}$;

(d) die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

Solution:

(a) Die Polynome $1 + x + x^2$ und x^3 sind in der angegebenen Menge enthalten, ihre Summe allerdings nicht. Also ist dies kein Vektorraum.

(b) Die angegebene Eigenschaft ist stabil unter skalarer Multiplikation und Addition, also erhalten wir einen Untervektorraum der $(n \times n)$ Matrizen.

(c) Aus den Körperaxiomen folgt sofort, dass dies ein Vektorraum ist.

(d) Da die skalare Multiplikation $(1/2) \cdot 1 \notin \mathbb{Z}$ ist, ist dies kein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.