Serie 5

1. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $V = \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume von V?

   (a)
   $$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid ad - bc \neq 0 \right\}$$

   (b)
   $$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid d = 0 \right\}$$

   (c)
   $$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a = d \right\}$$

   (d)
   $$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \in V \right\}$$

   Geben Sie für jeden Unterraum ein Erzeugendensystem an, d.h. finden Sie vektoren $w_1, w_2, \ldots, w_n$, sodass die Hülle
   $$\langle w_1, w_2, \ldots, w_n \rangle$$
   der entsprechende Unterraum ist.

2. Welche der folgenden Mengen von Vektoren sind linear unabhängig?

   (a) $(1,0,0,1),\ (2,3,-3,9),\ (1,3,-4,7),\ (2,0,1,3)$ in $M_{1\times 4}(\mathbb{R})$;

   (b) $(1,2,3,4),\ (-3,4,2,8),\ (-3,9,1,3)$ in $M_{1\times 4}(\mathbb{R})$;

   (c) $1+i$, $1-i$, wobei $\mathbb{C}$ als zweidimensionaler *reeller* Vektorraum aufgefasst wird;

   (d) $1+i$, $1-i$, wobei $\mathbb{C}$ als eindimensionaler *komplexer* Vektorraum aufgefasst wird;

   (e) $\sin(x),\ \sin(x+1),\ \sin(x+2)$, im Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$;

   (f) $\sin(0x),\ \sin(1x),\ \sin(2x)$, im Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$;

   (g) $\{\varphi_n \mid n = 0,1,2,\ldots\}$, wobei $\varphi_n(x) := 1/(x+n),\ x \neq \{0,-1,-2,...\}$.

   Hinweis: Für (g) kann es hilfreich sein zu bemerken, dass ein von Null verschiedenes Polynom nur endlich viele Nullstellen hat.

3. Im $\mathbb{R}^5$ seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 14 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wählen Sie aus v_1, v_2, v_3, v_4 bzw. w_1, w_2, w_3, w_4 Vektoren aus, die eine Basis von $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ bzw. $\langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$ bilden.

4. Sei $K = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{F}_2$ und sei

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset K^5.$$

Finden Sie ein minimales Erzeugendensystem $S' \subset S$ von $\langle S \rangle$, also ein Erzeugendensystem S' von $\langle S \rangle$, sodass keine echte Teilmenge von S' ein Erzeugendensystem von $\langle S \rangle$ ist.

5. Seien $A_1, A_2 \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\{A_1, A_2\}$ linear unabhängig ist.

   (b) Sei

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \mid d = e = 0, b - a = f, 3a = c \right\}$$

   Beweisen Sie, dass $\langle A_1, A_2 \rangle = M$.

   (c) Finden Sie $A_3 \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ so dass $\{A_1, A_2, A_3\}$ linear unabhängig ist. Ist $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$?

6. Es sei

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \right\rangle$$

eine lineare Hülle in $\mathbb{R}^3$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren in dieser linearen Hülle enthalten sind:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

7. Seien n und m natürliche Zahlen und A eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in K^n$ genau dann linear unabhängig sind, wenn $Av_1, \ldots, Av_m$ linear unabhängig sind.

8. Überprüfen Sie, ob die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$